

Mircea Radeş

**METODE DINAMICE PENTRU
IDENTIFICAREA
SISTEMELOR MECANICE**

dr. ing. MIRCEA RADEȘ

**METODE DINAMICE
PENTRU IDENTIFICAREA
SISTEMELOR MECANICE**

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA 1979

Identification of vibrating systems
Идентификация колебательных систем

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA
Bucuresti, Calea Victoriei nr. 125, cod 71021

Prefață

Vibrațiile și zgomotele constituie surse de „poluare mecanică” a mediului ambiant, având acțiune nocivă asupra oamenilor, clădirilor, mașinilor și instalațiilor industriale. Ele sînt rezultatul a două tendințe actuale ale dezvoltării tehnologice : pe de o parte — creșterea vitezelor de transport și a turațiilor de lucru ale mașinilor, pe de altă parte — realizarea unor construcții ușoare, de greutate redusă dar rigiditate relativ mare, deci cu frecvențe proprii ridicate, folosind tehnologii de asamblare care duc la micșorarea amortizării structurale, deci la creșterea răspunsului la rezonanță.

În aceste condiții, o importanță tot mai mare o are *proiectarea judicioasă a construcțiilor și utilajelor*, în vederea realizării unor sisteme în care să nu se depășească nivelele admisibile privind zgomotul, oboseala și uzura materialelor, funcționarea corespunzătoare a elementelor componente și confortul oferit utilizatorului.

Există trei direcții principale pentru realizarea acestui deziderat : 1) identificarea surselor perturbatoare, micșorarea intensității sau modificarea frecvențelor acestora, în vederea reducerii efectului sau evitării rezonanțelor structurale ; 2) reproiectarea sistemelor, pentru evitarea rezonanțelor, prin modificarea amplasării, formei și dimensiunilor elementelor componente, vizînd alegerea corectă a rigidității și distribuirea convenabilă a masei ; 3) alegerea unor materiale corespunzătoare, eventual atașarea unor elemente capabile să înmagazineze sau să disipeze energie, astfel încît sistemele să reziste în bune condițiuni la nivelele de vibrații anticipate sau cunoscute.

Un element esențial în rezolvarea acestor probleme îl constituie cunoașterea caracteristicilor dinamice ale materialelor și structurilor, pe baza cărora se poate realiza modelarea matematică a comportării dinamice a sistemelor mecanice.

Folosirea modelelor analitice poate duce la realizarea unor importante economii în proiectarea și omologarea unor produse noi, cu caracteristici tehnice ridicate. Ea permite ca modificările structurale și optimizările să se poată face încă în faza de proiectare, eventual de experimentare a prototipului, evitînd cheltuielile legate de încercarea mai multor variante constructive pe produsul realizat fizic. De asemenea, măsurînd răspunsul elementelor componente ale unei mașini, se poate determina prin calcul răspunsul ansamblului, simulînd diferite condiții de funcționare, scurtînd astfel perioada de dare în folosință a utilajelor.

Impulsionate de dezvoltarea calculatoarelor numerice și a echipamentului modern de măsurare electrică a mărimilor neelectrice, aceste preocupări au dus la conturarea unui nou domeniu de cercetare — *identificarea sistemelor mecanice*. Deși parte integrantă a teoriei generale a *identificării proceselor*, aplicat sistemelor elastice, el ridică probleme specifice, datorită în special rolului determinant al amortizării asupra dinamicii acestora.

În țara noastră, o lucrare de sinteză asupra metodelor generale de identificare experimentală a proceselor automatizate a fost publicată de un colectiv sub conducerea prof. C. Penescu [87]. Lucrarea de față își propune *expunerea metodelor specifice sistemelor mecanice*. De aceea, se tratează în special metodele de estimare a parametrilor în domeniul frecvențelor, iar dintre acestea — cele bazate pe analiza modală.

Majoritatea metodelor au apărut și s-au dezvoltat în strînsă legătură cu nevoile industriei aeronautice, fiind apoi utilizate și în construcția mașinilor unelte, a automobilelor și echipamentului feroviar. De asemenea, multe din metodele de identificare a sistemelor cu unul sau două grade de libertate sînt folosite în dinamica fundațiilor de mașini, precum și la determinarea proprietăților dinamice ale materialelor. Cartea se adresează deci celor care lucrează în aceste domenii, cu intenția de a le oferi o sinteză a celor mai utilizate metode de identificare dinamică a sistemelor elastice, precum și prezentarea unor metode noi, dezvoltate și utilizate de autor în cadrul Laboratorului de rezistența materialelor de la Institutul Politehnic București.

Se pune accent pe fundamentarea teoretică a fiecărei metode și pe *deducerea relațiilor de calcul al parametrilor dinamici ai modelelor matematice ale structurilor, pe baza datelor experimentale*, fără a se insista asupra metodologiei măsurării propriu-zise, care face obiectul lucrărilor de Măsurarea vibrațiilor [19].

După capitolul introductiv, în care se definesc noțiunile de bază, în capitolul 2 se dă o extindere mai mare prezentării metodelor de estimare a parametrilor sistemelor cu un grad de libertate, tratîndu-se separat cazul amortizării viscoase și cel al amortizării histeretice, pentru evitarea unor confuzii ce se fac frecvent în ceea ce privește caracterul exact sau aproximativ al unor formule de calcul al parametrilor. Urmează un capitol cuprinzînd elemente de teoria vibrațiilor sistemelor cu număr finit de grade de libertate și un capitol cu generalități asupra structurii modelelor de calcul, necesare fundamentării teoretice a metodelor de identificare cu excitație într-un punct — prezentate în capitolul 5 și a celor cu excitație în mai multe puncte — prezentate în capitolul 6. În capitolul 7 se expun metode de estimare a parametrilor sistemelor neliniare cu un grad de libertate.

S-a căutat ca în toate cazurile analizate să se prezinte relațiile cele mai simple pentru calculul parametrilor dinamici ai sistemelor elastice, cartea reprezentînd astfel un „îndrumar” la îndemîna celor interesați de aceste probleme. De asemenea, tratarea detaliată, aproape didactică, a metodelor de separare analitică a vectorilor modali urmărește familiarizarea inginerului mecanic cu un domeniu de studiu de dată relativ

recentă, cu largi posibilități de dezvoltare, în care se pot găsi noi direcții de cercetare în vederea perfecționării metodelor de estimare a parametrilor structurilor elastice.

În lucrare s-a expus cu precădere baza analitică a metodelor de estimare a parametrilor în domeniul frecvențelor. Prezentarea altor metode de identificare precum și a tehnicilor experimentale utilizate face obiectul altei lucrări.

Mulțumesc colectivului Editurii Academiei prin a cărei grijă competentă lucrarea de față a luat forma prezentată cititorilor.

25 iunie 1977

Mircea Radeș

Tabla de materii

Notatii	11
1. Caracteristicile dinamice ale sistemelor mecanice și identificarea lor	13
1.1. Natura și efectele vibrațiilor mecanice	13
1.2. Etapele unui studiu dinamic	14
1.3. Studiul răspunsului dinamic al unui sistem mecanic	16
1.4. Identificarea sistemelor mecanice	17
2. Identificarea parametrilor sistemelor liniare cu un grad de libertate	20
2.1. Modele de amortizare	20
2.2. Metode de excitație cu forță armonică aplicată masei	26
2.3. Metode de excitație cu forțe armonice în cvadratură	60
2.4. Metode de excitație cu forță centrifugă aplicată masei	67
2.5. Metode de excitație armonică a sistemelor nelegate de un reper fix	71
2.6. Metode de identificare fără baleiaj de frecvență	82
3. Elemente de teoria vibrațiilor sistemelor liniare discrete	94
3.1. Vibrațiile sistemelor conservative	94
3.2. Vibrațiile sistemelor amortizate	98
3.2.1. Ipoteze asupra amortizării	98
3.2.2. Moduri reale „clasice” de vibrație	99
3.2.3. Moduri reale forțate de vibrație	104
3.2.4. Moduri complexe de vibrație	111
4. Principiile identificării dinamice a sistemelor mecanice	120
4.1. Schema proceselor de identificare dinamică	120
4.2. Determinarea experimentală a caracteristicilor dinamice ale sistemelor reale	122
4.3. Structura modelelor analitice	132
5. Identificarea sistemelor liniare folosind excitație armonică într-un punct	144
5.1. Principiul metodelor de identificare cu excitație într-un punct	144
5.2. Identificarea sistemelor neamortizate	145
5.3. Identificarea sistemelor cu amortizare proporțională	151
5.4. Identificarea sistemelor cu amortizare neproporțională	177
5.5. Identificarea sistemelor puternic amortizate	191

6. Identificarea sistemelor liniare folosind excitație armonică în mai multe puncte	199
6.1. Principiul metodelor de excitație simultană în mai multe puncte	199
6.2. Metoda rezonanței de fază	203
6.2.1. Ajustarea forțelor excitatoare	204
6.2.2. Determinarea parametrilor modali	210
7.3. Metode de excitație consecutivă în mai multe puncte	222
7. Identificarea sistemelor neliniare cu un grad de libertate	229
7.1. Metode bazate pe folosirea excitației armonice	229
7.2. Metode bazate pe folosirea excitației armonice cu forțe în cvadratură	236
Bibliografie	242
Identification of vibrating systems (Summary)	245

Notății

- a_r, b_r — prescurtări, v. formulele (3.72)
 A_r, B_r — prescurtări, v. formulele (3.73)
 $[A], [B]$ — matrice definite de (5.68) și (5.48)
 c — coeficient de amortizare viscoasă
 c_r — coeficient de amortizare modal, element al matricii $[c]$
 $[C]$ — matricea de amortizare
 $C_{ij}^{(r)}$ — coeficient de amortizare al legăturii modale $l-j$
 $e = 2,718$ — baza logaritmilor naturali
 E — eroare
 f — forță concentrată
 F_r — forță modală
 $\{\mathcal{F}^{(r)}\}$ — mod principal de excitație
 g — factor de amortizare histeretică
 $[G]$ — matrice definită de (6.108)
 $h(t)$ — funcția pondere
 h — coeficient de amortizare histeretică
 $[H]$ — matricea amortizării histeretice
 $H(i\omega)$ — funcție de răspuns în frecvență
 $i = \sqrt{-1}$ — unitatea imaginară
 $[I]$ — matricea unitate
 j — punct curent de măsurare a răspunsului
 $[J]$ — matrice definită de (6.115)
 k — constantă elastică
 k_r — constantă elastică modală, element al matricii $[k]$
 $[K]$ — matricea de rigiditate
 $K_{ij}^{(r)}$ — constantă elastică a legăturii modale $l-j$
 l — punct curent de aplicare a excitației
 m — masă concentrată
 m_r — masă modală, element al matricii $[m]$
 $[M]$ — matricea de inerție
 $M_{ij}^{(r)}$ — masa legăturii modale $l-j$
 \mathcal{M} — mobilitate (viteză/forță)
 N — număr de grade de libertate
 N_f — număr de pulsații excitatoare
 p_r — coordonată principală neamortizată
 P_r — coeficienți în funcția transmitanței (5.187)
 ρ — putere complexă
 q_r — coordonată generalizată independentă
 $\{q^{(r)}\}$ — mod complex de vibrație (amortizare viscoasă)
 Q_r — coeficienți în funcția transmitanței (5.187)
 r — excentricitate; indice modal
 $\{R\}$ — vector definit de (3.171)
 s — arc de curbă; indice modal
 $\{S\}$ — vector excitație definit de (3.151)
 t — timp

- T — perioadă de vibrație
 \mathcal{T} — transmisibilitate
 u_r, v_r — parametri modali, v. relațiile (3.160)
 $[U], [V]$ — matrice definite de (3.150)
 $\{w^{(r)}\}$ — mod complex de vibrație (amortizare histeretică)
 W_c, W_p, W_d — energie cinetică, energie potențială, energie disipată
 W_R, W_I — energie activă, energie reactivă
 x — deplasare liniară
 $\{x\}$ — vector definit de (3.151)
 $X(\omega)$ — transformata Fourier a funcției $x(t)$
 y — deplasare liniară
 $Y(\omega)$ — transformata Fourier a funcției $y(t)$
 z — deplasare liniară relativă
 z_r — coordonată principală complexă
 Z — impedanță mecanică (forță/viteză)
 α — receptanță (deplasare/forță)
 β — obstructanță (forță/deplasare)
 γ — raport de mase
 γ_s — coeficienți în relația (6.36)
 $\delta_{ij}^{(r)}$ — coeficient modal, v. (3.185)
 ζ — raport de amortizare
 η — inertanță (acelerație/forță)
 θ — unghi
 $x_{ij}^{(r)}$ — coeficient modal, v. (3.75)
 λ — raportul componentelor la excitația cu forțe în cuadratură
 λ_r — coeficienți în dezvoltarea (3.120)
 μ — coeficient de neliniaritate ; masă aparentă (forță/acelerație)
 ν — frecvență
 ν_r — coordonată principală amortizată
 $\{\xi^{(r)}\}$ — vector propriu (amortizare viscoasă neproporțională)
 σ_r — pulsație complexă, v. (3.163)
 τ_r — notație, v. (5.88)
 φ — unghi de fază
 $\{\Phi^{(r)}\}$ — mod real forțat de vibrație
 $\chi_{ij}^{(r)}$ — coeficient modal, v. (3.74)
 ψ — unghi de fază
 $\{\Psi^{(r)}\}$ — mod real clasic de vibrație
 ω — pulsație
 ω_n — pulsație proprie (sisteme cu un grad de libertate)
 ω_r — pulsația proprie a modului r
 $\bar{\omega}_f$ — pulsație excitatoare
 Ω — pulsație adimensională

Lista de mai sus conține simbolurile cel mai frecvent folosite în lucrare. Toate notațiile sînt definite în text, pe măsura utilizării. Atunci cînd s-a folosit același simbol pentru mărimi diferite s-a căutat ca aceasta să nu producă dificultăți sau confuzii la lectura cărții.

Caracteristicile dinamice ale sistemelor mecanice și identificarea lor

1.1. Natura și efectele vibrațiilor mecanice

Oscilațiile — de natură mecanică, termică, electromagnetică etc. — sînt fenomene dinamice, caracterizate prin variația în timp a unei mărimi de stare a sistemului, de obicei în vecinătatea valorii corespunzătoare unei stări de echilibru.

Prin *vibrații* se înțeleg oscilațiile sistemelor elastice, adică mișcările sistemelor mecanice datorite unor forțe de readucere elastice.

1. Dacă un sistem elastic este scos din poziția de echilibru stabil, prin aplicarea unei solicitări statice, acesta înmagazinează o cantitate de energie potențială. Dacă ulterior sistemul este lăsat liber, fără să se mai introducă energie în sistem, acesta execută *vibrații libere*.

Deplasat dintr-o poziție de echilibru stabil, sistemul revine sub acțiunea forțelor de readucere elastice. Datorită masei din sistem, aceste forțe dau naștere la accelerații, astfel că sistemul trece prin poziția de echilibru cu o anumită viteză, deci are energie cinetică.

Deplasarea continuă pînă cînd forțele de readucere elastice, care produc acum o decelerare, opresc sistemul din mișcare. În acel moment, energia cinetică avută în dreptul poziției de echilibru s-a transformat în energie potențială de deformație, după care procesul se repetă. În prezența unor forțe de frecare, energia mecanică este disipată, iar vibrația este amortizată după un număr oarecare de cicluri.

2. Dacă deplasarea are loc în prezența unei surse de energie, se poate ajunge la fenomenul de *autovibrații*. În acest caz, amplitudinea mișcării crește continuu, pînă este limitată de efecte neliniare sau amortizare. Mișcarea este întreținută de o forță periodică, creată sau determinată de mișcarea însăși, deși energia este furnizată în mod uniform de către sursa exterioară.

3. O altă categorie de mișcări o formează *vibrațiile forțate* (întreținute) produse de forțe perturbatoare care există independent de mișcare. În general, sarcinile sau deplasările sînt aplicate dinamic, cu o anumită viteză, deci sînt variabile în timp. Astfel de excitații implică un transfer de energie de la sursa perturbatoare la sistem. Dacă transferul are loc periodic, constant pe fiecare ciclu, vibrația forțată este *staționară*, de amplitudine constantă. Dacă transferul se face neuniform, vibrația are un caracter *tranzitoriu*, amplitudinea variind pînă la stabilirea unui regim staționar sau pînă la amortizarea completă.

4. Aplicarea bruscă a unei perturbații produce șocuri sau impacturi. Șocul este o perturbație prin care se transmite sistemului energie cinetică într-un interval de timp scurt în comparație cu perioada sa proprie de

oscilație. Răspunsul la un șoc este deci, din momentul încetării acțiunii, o vibrație liberă. Excitația *tranzitorie* este o perturbație care durează mai multe perioade de vibrație proprie ale sistemului.

5. Vibrațiile periodice și cele tranzitorii sînt fenomene deterministe. În majoritatea aplicațiilor practice, vibrațiile au caracter nedeterminist, *aleator*, în sensul că valorile instantanee ale mărimilor care definesc mișcarea nu mai sînt predictibile. Se recurge la calculul probabilităților și se lucrează cu mărimi statistice sau valori medii, care în cazul proceselor staționare, ergodice și cu distribuție gaussiană devin predictibile.

6. În general, cînd asupra unui sistem liniar și cu parametri invariabili în timp se aplică o perturbație oarecare, mișcarea rezultantă este suma a două componente distincte: *vibrația forțată*, descrisă de o funcție asemănătoare funcției excitației și *vibrația proprie*, dependentă doar de caracteristicile dinamice ale sistemului, a cărei funcție de timp este de obicei o combinație între o sinusoidă și o exponențială.

7. În cazul unei perturbații armonice sau aleatoare staționare, vibrația proprie se amortizează imediat după începutul mișcării, rămînînd doar vibrația forțată, care în anumite condiții poate produce rezonanță.

8. *Rezonanța* ia naștere la frecvențele la care suma celor două energii „reactive” recuperabile — potențială și cinetică — este nulă, iar energia transmisă sistemului este egală cu cea disipată prin frecări. Ea apare cînd excitația este descrisă de o funcție de timp care se aseamănă cu funcția de timp a mișcării proprii a sistemului sau cînd spectrul de frecvențe al perturbației acoperă un domeniu ce cuprinde frecvențele proprii ale sistemului.

Rezonanța înseamnă amplitudini mari ale mișcării în anumite puncte sau părți ale sistemului, însoțite de solicitări și eforturi unitare mari sau mișcări relative considerabile, care pot duce la ruperi prin oboseală, funcționare necorespunzătoare, uzură, trepidații, deci zgomot — cu acțiune nocivă asupra omului.

9. Evitarea regimurilor periculoase de vibrații, în special a celor din vecinătatea frecvențelor de rezonanță, se poate face prin următoarele măsuri:

— identificarea surselor de excitație și atenuarea sau izolarea acestora;

— modificarea structurii sau a parametrilor sistemului excitat, pentru evitarea rezonanțelor;

— adoptarea unor soluții constructive pentru amortizarea vibrațiilor, atunci cînd rezonanțele nu pot fi evitate.

În toate cazurile, este necesar să se înțeleagă, în primul rînd, care este influența modificărilor structurale asupra comportării dinamice a sistemelor mecanice la diferite tipuri de perturbații. Pe această bază, inginerul proiectant va fi capabil să dezvolte metode și să folosească modele care să prevadă răspunsul dinamic al sistemelor reale, experimentatorul va putea interpreta corect rezultatele măsurărilor, și împreună vor putea lua decizii fundamentate în vederea modificării în sensul dorit a parametrilor sistemelor studiate.

1.2. Etapele unui studiu dinamic

Studiul dinamic al unui sistem mecanic are drept scop fie minimizarea efectelor nedorite ale vibrațiilor, fie optimizarea parametrilor de funcționare, acolo unde vibrația este un proces util. Pentru aceasta este

necesar să se cunoască, iar uneori să se poată prevedea, comportarea dinamică a sistemelor mecanice și să se înțeleagă în ce mod modificările aduse unui sistem, sau parametrilor sursei perturbatoare, afectează comportarea acestuia în regim dinamic.

În general, în studiul analitic al unei probleme de vibrații se parcurg următoarele etape :

Etapa 1. Definierea problemei studiate, respectiv definirea sistemului analizat.

Etapa 2. Modelarea aspectelor relevante ale fenomenelor dinamice observate. De obicei, această parte se parcurge în două stadii : întâi modelarea fizică și apoi modelarea matematică. Uneori se trece direct la modelarea matematică.

Modelarea fizică presupune formularea unui „model fizic” a cărui comportare să aproximeze cât mai bine pe cea a sistemului real. Modelul fizic se aseamănă cu sistemul real în ceea ce privește caracteristicile de bază, dar este mai simplu și deci mai abordabil analizei.

Astfel, elementele componente ale unei mașini sau structuri pot fi modelate ca bare, plăci, învelișuri, discuri, tuburi, corpuri masive etc. Acțiunea reciprocă a două corpuri poate fi schematizată prin forțe concentrate, cupluri concentrate, sarcini distribuite etc.

În multe cazuri, însă, răspunsul dinamic al structurilor poate fi reprezentat printr-un model cu „parametri concentrați”, compus din mase, arcuri și amortizoare. Dacă structura este complicată și dacă interesează răspunsul pe un domeniu larg de frecvențe, numărul acestor elemente poate fi destul de mare. Totuși, pentru sisteme simple sau pentru structuri complexe, într-un domeniu limitat de frecvențe, răspunsul poate fi reprezentat suficient de precis folosind un model fizic compus doar din câteva elemente discrete.

Aproximațiile care se fac la formularea modelelor fizice se referă la : neglijarea efectelor secundare, neglijarea unor interacțiuni cu mediul ambiant, înlocuirea caracteristicilor „distribuite” prin parametri „concentrați” similari, liniarizarea relațiilor cauză-efect între variabilele fizice, neglijarea variației în timp a unor parametri, neglijarea caracterului aleator al unor fenomene etc.

Pe măsura îmbunătățirii modelului și a definirii mai precise a problemei studiate, se renunță la o parte din aceste aproximații. De exemplu, la frecvențe înalte, unde efectele inerțiale nu mai pot fi neglijate, modelul de bară Bernoulli-Euler este înlocuit cu modelul de bară Timoshenko. În cazul amplitudinilor mari de vibrație trebuie luate în considerație neliniaritățile de natură geometrică și fizică, care la amplitudini mici sînt neglijate.

Modelarea matematică presupune elaborarea unui „model matematic” care să reprezinte modelul fizic, adică scrierea ecuațiilor de mișcare (diferențiale, integro-diferențiale, în diferențe finite etc.) ale sistemului fizic.

Trecerea de la modelul fizic la modelul matematic se face în patru etape succesive :

a — alegerea variabilelor care descriu starea sistemului la un moment dat ;

b — stabilirea ecuațiilor de echilibru pentru sistem în ansamblu, sau pentru fiecare component sau subsistem în parte ;

c — stabilirea ecuațiilor de compatibilitate, care exprimă legătura între mișcările subsistemelor interconectate ;

d — scrierea legilor fizice, adică a relațiilor constitutive pentru fiecare element component.

Etapa 3. Studiul comportării dinamice a modelului matematic, prin rezolvarea ecuațiilor de mișcare și stabilirea unor relații între parametrii modelului și mărimile măsurabile experimental. Cu alte cuvinte — folosirea modelului pentru descoperirea comportării relevante a sistemului real.

Etapa 4. Verificarea validității modelului prin compararea comportării lui cu cea a sistemului real, determinată experimental.

Apoi se revine la prima etapă, reluând secvența de câte ori este necesar. În cazul proiectării — se face alegerea parametrilor fizici ai sistemului și a soluțiilor constructive, sau modificarea acestora în vederea obținerii comportării dorite.

Etapele legate de definirea problemei și de transpunerea rezultatelor într-un proiect nu fac obiectul lucrării de față; experiența necesară se dobândește în munca de proiectare. De asemenea, nu se insistă asupra rezolvării ecuațiilor de mișcare ale unor modele date — aceasta făcând obiectul majorității lucrărilor de dinamica sistemelor elastice [20] și nici asupra aspectelor de detaliu privind măsurarea experimentală a răspunsului dinamic al sistemelor reale — tratate în lucrări speciale [19].

În lucrare se pune accent pe determinarea relațiilor între parametrii modelelor utilizate frecvent în teoria vibrațiilor mecanice și mărimile măsurabile experimental.

1.3. Studiul răspunsului dinamic al unui sistem mecanic

Cauza vibrațiilor unui sistem mecanic o constituie sarcinile exterioare sau deplasările impuse, variabile în timp, denumite în general *excitații* sau *perturbații*.

Mișcările diverselor puncte ale sistemului și eforturile dinamice din elementele acestuia reprezintă *efectele* de natură mecanică ale acestor perturbații, fiind denumite în general *răspunsuri*.

Răspunsul este condiționat atât de parametrii excitației cât și de caracteristicile mecanice ale sistemului. Relația cauză-efect depinde de sistem.

Rezolvarea oricărei probleme de vibrații constă în stabilirea relațiilor între excitație, răspuns și caracteristicile dinamice ale sistemului, conform schemei din figura 1.1.



Fig. 1.1

Studiul răspunsului dinamic al unui sistem mecanic cuprinde două categorii mari de probleme: cea directă și cea inversă [8].

Dacă ecuațiile care descriu comportarea dinamică a sistemului din figura 1.1. sînt cunoscute, atunci *pro-*

blema directă constă în determinarea răspunsului sistemului la o excitație cunoscută. De exemplu, dacă se cunoșc ecuațiile care descriu dinamica unui avion, se cere răspunsul acestuia la șocul produs de o rafală de vînt.

În *problema inversă* sau se cunoaște răspunsul sistemului la o excitație dată, însă fie ecuațiile de mișcare, fie configurația, fie unii parametri

ai sistemului mecanic sînt necunoscuți și trebuie determinați, sau se cunoaște sistemul și se cere excitația.

Problema inversă poate fi deci împărțită în trei subprobleme [8]:

a) *Sinteza sau proiectarea*. Date fiind excitația și răspunsul, se caută un sistem realizabil fizic care să aproximeze cît mai bine relația excitație-răspuns. În general, soluția nu este unică, gradul de aproximare fiind diferit, pe măsura rezolvării problemei ajungîndu-se la sisteme tot mai complicate.

Proiectarea presupune un compromis între mai multe cerințe contrare, astfel că realizarea practică a sistemului presupune îmbinarea științei cu arta, acest ultim factor referindu-se și la instinctul pentru realizarea unor proporții corecte.

b) *Comanda sau măsurarea*. Se cunoaște sistemul și răspunsul acestuia. Se caută excitația care produce răspunsul dat. Este cazul măsurării cu aparate a căror funcție de transfer sau curbă de etalonare se cunoaște, cazul identificării forțelor excitatoare etc.

c) *Identificarea sistemului*. Se cunosc o serie de funcții ale excitației și funcțiile corespunzătoare ale răspunsului. Se caută o descriere matematică sau un model analitic al sistemului. Relațiile între excitație și răspuns se determină experimental. Datele experimentale cele mai frecvent utilizate sînt curbele de răspuns în frecvență ale sistemului, obținute prin excitația cu „semnale de probă” armonice, neperiodice sau aleatoare. Pe baza acestor curbe se face identificarea frecvențelor și a modurilor proprii de vibrație, precum și a proprietăților dinamice specifice — amortizare, rigiditate dinamică etc. *Acest mod de „identificare în domeniul frecvențelor” va fi tratat cu prioritate în lucrarea de față.*

1.4. Identificarea sistemelor mecanice

Rezolvarea unei probleme de vibrații implică un proces iterativ de îmbinare a analizei teoretice cu determinările experimentale. În acest cadru, cunoașterea caracteristicilor dinamice ale materialelor și structurilor constituie un element esențial. Forma cea mai evoluată de exprimare a acestora o constituie modelul matematic al sistemului analizat, care permite un studiu cantitativ al fenomenelor, fiind deosebit de util în probleme de proiectare și optimizare.

Identificarea sistemelor se poate defini ca fiind procesul de determinare a ecuațiilor diferențiale (sau în diferențe finite) care descriu comportarea unui sistem, în concordanță cu un criteriu de performanță prestabilit, pe baza unor relații între mărimile care caracterizează excitația și cele care caracterizează răspunsul (determinate experimental).

Identificarea dinamică se referă deci la stabilirea ecuațiilor de mișcare, implicit a coeficienților care intră în compunerea lor, deci — la determinarea caracteristicilor dinamice ale sistemelor.

În general, un proces de identificare cuprinde trei etape:

a) *Alegerea structurii modelului* — în care se alege, pe baza experienței prealabile, ecuațiile diferențiale pentru un model propus. Astfel, comparînd curbele de răspuns în frecvență ale sistemului studiat cu cele determinate analitic pentru o serie de modele, se poate stabili numărul gradelor de libertate semnificative, tipul amortizării, oportunitatea introducerii elementelor neliniare etc., putîndu-se face o prestructurare a sistemului.

Parametrii necunoscuți ai acestei structuri — mase, rigidități, constante de amortizare — se determină ulterior.

b) *Alegerea criteriului de comparație a modelului cu structura reală* — în care se specifică criteriul matematic ce trebuie optimizat pentru a realiza identificarea.

În forma cea mai simplă, se recurge la compararea directă a curbelor de răspuns în frecvență ale structurii și ale modelului, de obicei în câteva puncte date în vecinătatea rezonanțelor.

În metodele mai evoluat, concordanta proprietăților modelului cu ale structurii reale se exprimă printr-o *funcție criteriu*, de exemplu — integrala pătratului erorii (eroarea este aici diferența dintre răspunsul instantaneu al structurii și cel al modelului). Determinarea parametrilor optimi ai modelului se reduce la căutarea minimului unei funcții de mai multe variabile. Dacă se adoptă criteriul mediei erorii pătratice, se folosește metoda regresiei.

În alte cazuri, eroarea se definește ca diferența dintre răspunsul în frecvență al structurii și cel al modelului. Astfel, la aproximarea prin cercuri a buclelor diagramelor polare (v. § 5.3.5), „cel mai potrivit cerc” se poate trasa pe baza condiției de minim a erorii mediei pătratice între coordonatele punctelor experimentale și curba teoretică reprezentând răspunsul modelului. Analog se face identificarea experimentală a coeficienților unei funcții de transfer *).

c) *Estimarea parametrilor modelului* — în care se alege un algoritm pentru ajustarea parametrilor necunoscuți, care este folosit la evaluarea acestora astfel încât criteriul de identificare să fie minimizat. Pentru foarte multe cazuri practice, însă, o precizie suficient de bună se obține folosind metode de „identificare directă” (considerând eroarea nulă), fără a recurge la prelucrarea statistică a rezultatelor sau optimizarea prin regresie, metoda verosimilității maxime, a filtrelor neliniare, metoda Bayes etc.

Cele trei etape nu sînt obligatorii. De obicei se cunoaște parțial structura modelului matematic al sistemului studiat și chiar o parte din parametrii lui, problema identificării reducîndu-se la evaluarea (estimarea) unor parametri necunoscuți în cadrul acestei structuri (identificarea unei „grey box”). În alte cazuri, descrierea sistemului este complet necunoscută, punîndu-se problema identificării unor „black box”, ca în cazul determinării funcțiilor de transfer ale componentelor unui sistem, pentru ca, pe baza lor, să se calculeze răspunsul ansamblului [64].

În accepțiunea modernă, noțiunea de identificare a sistemelor mecanice a căpătat un sens mai larg, presupunînd realizarea fie numai parțială, fie totală, a următoarelor secvențe :

a — determinarea experimentală a unor relații între excitație și răspuns, adesea sub forma matricei funcțiilor direcționale de răspuns în frecvență ;

b — determinarea experimentală a formei modurilor proprii de vibrație, eventual a unor „hărți modale” conținînd linii de egală amplitudine a vibrației ;

c — determinarea unui *model modal* sau a unui *model fizic* compus din elemente elastice, disipative și inerțiale, care să poată descrie un fenomen fizic ce interesează pe proiectant sau tehnolog ; uneori, deducerea unor expresii algebrice ale funcțiilor de transfer ale sistemului, pe baza

*) Dat, R., Meurzec, J.-L., Rech. Aérop., 4, 209—215 (1972).

funcțiilor de răspuns în frecvență obținute sub formă grafică sau ca date numerice ;

d — folosirea modelului pentru analiza sau optimizarea sistemului studiat.

Dintre aplicațiile de cel mai mare interes ale identificării sistemelor mecanice se pot cita :

a — identificarea comportării dinamice a unui sistem mecanic, ca parte a unui sistem de comandă numerică adaptivă sau logică ;

b — identificarea caracteristicilor de transfer ale componentelor sistemelor de comandă și acționare a mașinilor ;

c — identificarea caracteristicilor direcționale de răspuns în frecvență ale unei structuri formate din mai multe subansambluri ;

d — determinarea prin calcul a răspunsului la alte excitații sau la mai multe perturbații simultane, pe baza datelor obținute prin măsurarea răspunsului la o excitație dată ;

e — prevederea efectelor modificărilor structurale, în scopul optimizării soluției constructive fără a recurge la încercarea mai multor prototipuri.

O bibliografie exhaustivă asupra problemelor generale de identificare a sistemelor se găsește în lucrările lui Nicolai [82], Eykhoff [32], Åström și Eykhoff [3], Iserman [59, 60], Sage și Melsa [105] și în comunicările prezentate la simpoziunile IFAC [56—58]. Sinteze critice asupra metodelor de identificare a sistemelor mecanice se găsesc în lucrările lui Young și On [138], Natke [79 — 81] și Radeș [93]. De asemenea, monografia publicată în 1972 sub redacția lui W. D. Pilkey și R. Cohen cu ocazia Simpozionului A.S.M.E. asupra problemelor de „Modelare matematică pe baza datelor experimentale” [115] conține o sinteză a contribuțiilor recente în acest domeniu. Se pune accent pe noile metode de interpretare statistică a datelor experimentale, de estimare a parametrilor prin metode moderne de minimizare a erorilor ca metoda gradientului, metoda verosimilității maxime (Fischer), metoda probabilității condiționate (Bayes), metoda filtrelor neliniare (Kalman) etc.

În lucrarea de față se prezintă doar acele metode care și-au găsit deja o largă aplicare în diverse domenii ale ingineriei mecanice cum ar fi : determinarea caracteristicilor dinamice ale structurii mașinilor unelte, a șasiului și caroseriei automobilelor și camioanelor, a echipamentului feroviar și mașinilor de lucrat pământul ; încercarea la sol și în zbor a avioanelor și rachetelor ; determinarea proprietăților dinamice ale terenurilor de fundație și a materialelor folosite la izolarea antivibratorie etc. Prin aceasta cartea își propune să stabilească o punte între lucrările clasice asupra determinării caracteristicilor dinamice ale sistemelor mecanice și lucrările moderne asupra identificării sistemelor.

Identificarea parametrilor sistemelor liniare cu un grad de libertate

Cele mai simple metode de „identificare directă” se bazează pe analiza răspunsului dinamic al modelului cu un grad de libertate.

În cele ce urmează se consideră doar sisteme liniare și cu parametri invariabili în timp. La început se prezintă câteva mecanisme de amortizare folosite curent în calcule de vibrații. Apoi se prezintă metode de analiză grafică a curbelor de răspuns în frecvență, trasate în urma unui baleiaj de frecvență în vecinătatea rezonanței, numite din acest motiv — „metode de rezonanță”. În continuare, se expun metode bazate pe modificarea impedanței sistemului, pe calculul energiei disipate sau pe analiza unor regimuri tranzitorii de vibrații.

2.1. Modele de amortizare

Principalele cauze ale amortizării vibrațiilor unei structuri deformabile sînt neelasticitatea materialelor — care produce „amortizarea internă”, frecările între elementele componente — care produc „amortizarea de structură” și frecările cu mediul ambiant — care produc „amortizarea externă”. Natura fizică a acestor mecanisme de amortizare este atît de diferită, încît pentru descrierea lor a fost necesar să se elaboreze mai multe modele matematice, cele mai răspîndite fiind descrise pe scurt în cele ce urmează.

2.1.1. Amortizarea viscoasă liniară

Cel mai simplu model mecanic, care pe lîngă acumularea de energie potențială de deformare descrie și disiparea de energie, este modelul Kelvin-Voigt (fig. 2.1.). Acesta constă dintr-un element elastic ideal, reprezentat prin arcul de constantă elastică k și un amortizor ideal, legat în paralel, definit prin coeficientul de amortizare c .

Forța dezvoltată de arc este proporțională cu deplasarea relativă $|f_e| = k(x - y) = kz$; forța dezvoltată de amortizor este proporțională cu viteza relativă $|f_a| = c(\dot{x} - \dot{y}) = c\dot{z}$. Relația „forță-deplasare” pentru modelul din figura 2.1 este deci

$$f = kz + c\dot{z}. \quad (2.1)$$

Deși ca model reologic acesta are o serie de dezavantaje [68], simplitatea și mai ales liniaritatea relației (2.1) face ca modelul Kelvin-Voigt să fie mult folosit în calcule de vibrații amortizate.

Când forța este cunoscută ca o funcție de timp, soluția ecuației diferențiale (2.1) este

$$z(t) = z(0) + \frac{1}{c} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} f(t-\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

unde $\tau_0 = \frac{c}{k}$ este „constanta de timp” a modelului.

Dacă se impune modelului o deformație armonică

$$z = \hat{z} \cos \omega t, \quad (2.3)$$

acesta reacționează cu o forță

$$f = \hat{z} (k \cos \omega t - \omega c \sin \omega t). \quad (2.4)$$

Eliminând timpul între relațiile (2.3) și (2.4), se obține ecuația curbelor de histererezis din figura 2.2.

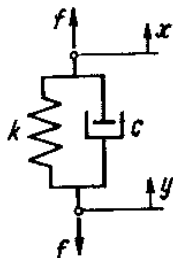


Fig. 2.1

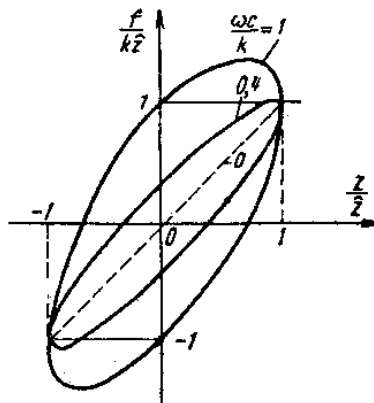


Fig. 2.2

$$\frac{f}{k\hat{z}} = \frac{z}{\hat{z}} \pm \frac{\omega c}{k} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{\hat{z}}\right)^2} \quad (2.5)$$

reprezentând elipse, de parametru $\frac{\omega c}{k}$.

Energia disipată într-un ciclu de vibrație este proporțională cu aria elipsei

$$W_a = \oint f \cdot dz = \int_0^{2\pi} f \dot{z} dt = \pi \hat{z}^2 c \omega. \quad (2.6)$$

Pentru o valoare dată a amplitudinii vibrației \hat{z} , W_a crește proporțional cu pulsația.

Folosind notația simbolică complexă, dacă

$$z = \hat{z} e^{i\omega t}, \quad (2.7)$$

atunci

$$f = (k + i\omega c)\hat{z} e^{i\omega t} = \bar{k}z \quad (2.8)$$

unde

$$\bar{k} = k + i\omega c \quad (2.9)$$

este o constantă „elastică” complexă [11].

Dacă se aplică modelului o forță armonică $f(t) = \hat{f} e^{i\omega t}$, deformația este $z = \hat{z} e^{i(\omega t + \varphi)}$, unde $\hat{z} = \frac{F_0}{\sqrt{k^2 + c^2 \omega^2}}$ iar $\varphi = \arctg \frac{c\omega}{k}$.

Din relația (2.6) rezultă

$$W_a = \frac{\hat{f}^2}{k} \frac{\pi \frac{c\omega}{k}}{1 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}.$$

2.1.2. Amortizarea histeretică

S-a observat experimental [62] că la multe materiale folosite curent în practică, energia disipată într-un ciclu de vibrație este proporțională cu pătratul amplitudinii deplasării dar este independentă de pulsație, deci modelul amortizării viscoase liniare nu descrie corect comportarea acestor materiale.

La această situație se ajunge dacă se realizează un amortizor (fig. 2.3) la care coeficientul de amortizare c variază invers proporțional cu pulsația [12]

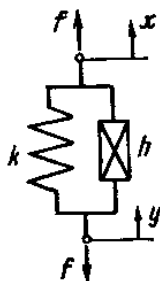


Fig 2.3

$$c = \frac{h}{\omega}, \quad (2.10)$$

deoarece înlocuind expresia (2.10) în (2.6) rezultă

$$W_a = \pi \hat{z}^2 h, \quad (2.11)$$

unde h este coeficientul de amortizare histeretică.

În cazul vibrațiilor armonice, forța de amortizare are expresia

$$f_a = \frac{h}{\omega} \dot{z} = ihz, \quad (2.12)$$

fiind deci proporțională cu deplasarea relativă z , dar defazată cu 90° înaintea acesteia, deci în fază cu viteza relativă $\dot{z} = i\omega z$.

Constanta „elastică” complexă (2.9) este în acest caz independentă de pulsație

$$\bar{k} = k + ih = k(1 + ig), \quad (2.13)$$

unde *factorul de amortizare* $g = \frac{h}{k}$ este constant, ceea ce s-a observat experimental la o serie de materiale de construcții [109] și la elastomeri [111].

Trebuie avut în vedere însă că modelul amortizării histeretice (denumită și amortizare „constructivă” sau „structurală”) a fost postulat și este valabil doar în cazul vibrațiilor armonice. El nu reprezintă un mecanism de disipare a energiei realizabil fizic, deoarece în cazul solicitării în regim tranzitoriu conduce la rezultate absurde. Astfel, forța de răspuns a modelului din figura 2.3 are o expresie de forma

$$f(t) = kz(t) + \frac{kg}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t},$$

deci depinde nu numai de variația în timp a deplasării z pînă în momentul aplicării forței, dar și după acest moment [122].

Totuși, în regim armonic și pe domenii limitate de frecvențe, modelul amortizării histeretice dă rezultate bune, confirmate de experiențe [27].

2.1.3. Amortizarea creditară

Dacă amortizorul viscos liniar c este introdus în „modelul cu trei parametri” din figura 2.4 (corespunzător modelului reologic al „solidului liniar standard” [68]), unde k_1 și k_2 sînt elemente pur elastice, se obține un sistem a cărui comportare este descrisă de două ecuații

$$f = k_1 z_1 + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2), \quad (2.14)$$

$$0 = k_2 z_2 - c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2), \quad (2.15)$$

unde

$$z_1 = y_1 - x, \quad z_2 = y_2 - x.$$

Deoarece nu interesează coordonata „ascunsă” z_2 , se rezolvă ecuația (2.15) în funcție de z_2 și se înlocuiește în (2.14). Considerînd că la $t = 0$ modelul este nedeformat, rezultă

$$f = k_1 z_1 + \int_0^t G(t-\tau) \dot{z}_1(\tau) d\tau, \quad (2.16)$$

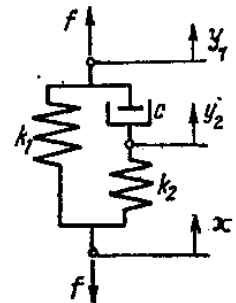


Fig. 2.4

unde

$$G(t) = k_2 e^{-\frac{k_2}{c} t}. \quad (2.17)$$

În ecuația (2.1) termenul disipativ este proporțional cu viteza relativă instantanee. În ecuația (2.16) el depinde de „istoria” acestei viteze, de aceea amortizarea se numește „ereditară”.

Cînd forța este cunoscută ca o funcție de timp, soluția ecuațiilor (2.14) și (2.15) este

$$z_1(t) = \frac{f(t)}{k_1 + k_2} + \frac{1}{c} \left(\frac{k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \int_0^t e^{-\frac{\tau}{\tau_2}} f(t - \tau) d\tau \quad (2.18)$$

unde

$$\tau_2 = c \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right).$$

Primul termen din membrul drept descrie răspunsul instantaneu al modelului din figura 2.4, fenomen observat la multe materiale.

În cazul mișcării armonice, folosind notația complexă și înlocuind în ecuațiile (2.14) și (2.15) soluțiile armonice

$$z_1(t) = \hat{z}_1 e^{i\omega t}, \quad z_2(t) = \hat{z}_2 e^{i\omega t}, \quad (2.19)$$

eliminînd apoi coordonata internă z_2 , se obține

$$f = \bar{k} z_1$$

unde constanta elastică complexă \bar{k} are expresia

$$\bar{k} = k_1 + i \frac{\omega c k_2}{k_2 + i\omega c}. \quad (2.20)$$

Dacă se separă partea reală de cea imaginară, expresia (2.20) se poate pune sub o formă similară expresiei (2.9) obținute pentru modelul cu amortizor viscos „cuplat direct” și anume

$$\bar{k} = k_e + i\omega c_e \quad (2.21)$$

unde

$$k_e = k_1 + k_2 \frac{\omega^2 c^2}{k_2^2 + \omega^2 c^2}, \quad c_e = c \frac{k_2^2}{k_2^2 + \omega^2 c^2}. \quad (2.22)$$

În felul acesta, modelul amortizării ereditare se poate reduce la un model Kelvin-Voigt cu parametri dependenți de pulsație.

Energia disipată pe un ciclu de vibrație este

$$W_a = \pi \hat{z}_1^2 \omega c_e = \pi \hat{z}_1^2 \frac{ck_2^2 \omega}{k_2^2 + \omega^2 c^2} \quad (2.23)$$

fiind nulă pentru $\omega = 0$ și $\omega = \infty$, avînd o valoare maximă la $\omega_0 = \frac{k_2}{c}$ unde $c_e = \frac{c}{2}$. Corespunzător, la $\omega = \omega_0$ se obține elipsa de histerezis (fig. 2.5) de suprafață maximă, iar la $\omega = 0$ și $\omega = \infty$ elipsa degenerază în linii drepte.

În figura 2.6 se arată dependența de pulsație a parametrilor echivalenți k_e și c_e . Modelul din figura 2.4 poate fi îmbunătățit, dispunînd în serie sau în paralel mai multe unități similare, avînd diferite constante de timp, pentru a realiza o mai bună corelație cu datele experimentale. Același rezultat se poate obține alegînd în ecuația (2.16) o expresie corespunzătoare pentru funcția $G(t)$. Totuși, complexitatea acestor modele a limitat folosirea lor atît din punct de vedere analitic (la calcule) cît și experimental (la caracterizarea materialelor), preferîndu-se pentru aplicațiile ingineresti modelele mai simple, care descriu comportarea materialelor reale cu precizie de cele mai multe ori satisfăcătoare [11].

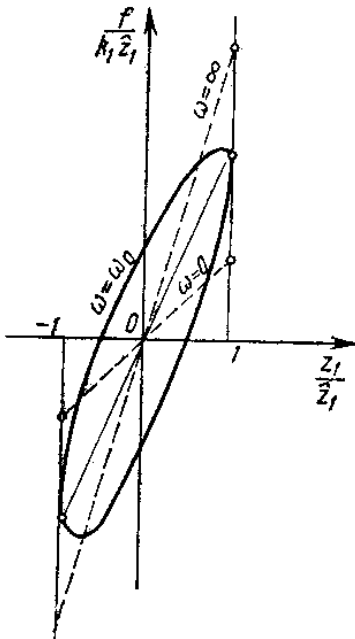


Fig. 2.5

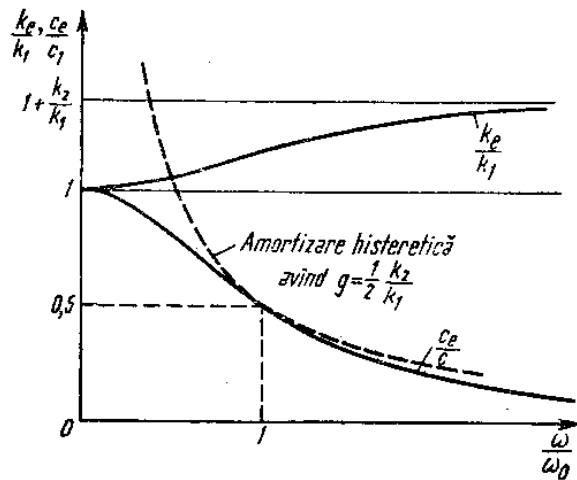


Fig. 2.6

2.1.4. Alte mecanisme de amortizare

Amortizarea coulombiană sau amortizarea prin frecare uscată, este un mecanism de amortizare neliniară. Forța de amortizare coulombiană are amplitudine constantă, este independentă de deplasare, avînd sens contrar vitezei

$$f_a = R \frac{\dot{z}}{|\dot{z}|}$$

Energia disipată pe un ciclu de vibrație armonică $z = \hat{z} \cos \omega t$ de un amortizor cu frecare uscată este [104]

$$W_d = 4R\hat{z}$$

deci independentă de pulsație.

Amortizarea pătratică este tot un mecanism de amortizare neliniară. Forța de amortizare este proporțională cu pătratul vitezei relative

$$f_d = c_2 \dot{z}^2.$$

O astfel de forță se obține la curgerea turbulentă a unui fluid printr-un orificiu, în general la viteze \dot{z} mari.

Energia disipată pe ciclu, de un asemenea amortizor, care are o deformație armonică $z = \hat{z} \cos \omega t$, este

$$W_d = \frac{8}{3} c_2 \omega^2 \hat{z}^3, \quad (2.24)$$

deci depinde atât de pulsație, cât și de amplitudinea vibrației.

De obicei, folosind conceptul de *amortizare viscoasă echivalentă* [104], se înlocuiește forța de amortizare neliniară cu o forță viscoasă liniară, astfel încît energia disipată pe ciclu de amortizorul neliniar să fie egală cu cea disipată de un amortizor viscos echivalent, supus la o deplasare relativă de aceeași amplitudine.

Coefficientul de amortizare viscoasă echivalentă este deci în acest caz

$$c_{ech} = \frac{W_d}{\pi \omega \hat{z}^2} = \frac{8}{3\pi} c_2 \omega \hat{z}.$$

Generalizînd noțiunea de *amortizare echivalentă*, calculul analitic al vibrațiilor mecanice este simplificat prin folosirea cu precădere a două modele de amortizare — viscoasă sau histeretică. Se egalează deci energia disipată pe ciclu prin toate mecanismele de amortizare, inclusiv cea datorită radiației (prin unde, în medii continue infinite), cu energia disipată printr-un singur mecanism — viscos sau histeretic — într-un regim de vibrații de aceeași amplitudine. Rezultă astfel fie un *coeficient de amortizare viscoasă echivalentă*, fie un *coeficient de amortizare histeretică echivalentă* [74], mărimi dependente în general de pulsație și de amplitudinea vibrației, cu care se lucrează ca și cînd ar fi constante, urmînd să se determine experimental domeniile în care această ipoteză este valabilă.

2.2. Metode de excitație cu forță armonică aplicată masei

Sistemul cu un grad de libertate, avînd baza fixă și masa acționată de o forță variabilă în timp (fig. 2.7), reprezintă un model adecvat pentru descrierea răspunsului unei structuri complexe într-un mod principal de

vibrație. De asemenea, el poate modela cel mai simplu montaj experimental folosit la măsurarea proprietăților unui element deformabil, folosit ca izolator de vibrații.

Din acest motiv s-a considerat utilă prezentarea relațiilor *exacte* de calcul al parametrilor sistemului (valabile și la structuri cu amortizare relativ mare), tratându-se separat, pentru toate funcțiile de răspuns în frecvență, cazul amortizării histeretice și cel al amortizării vâscoase liniare. Pentru simplificarea notației se folosesc însă aceleași simboluri pentru mărimile ce definesc răspunsul în cele două cazuri de amortizare.

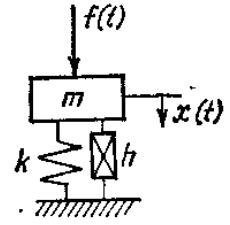


Fig. 2.7

La reprezentarea grafică a răspunsului în frecvență nu se folosesc coordonate adimensionale, ci cantități măsurabile experimental, ce intervin direct în formulele utilizate în practică.

2.2.1. Identificarea parametrilor sistemului cu amortizare histeretică

2.2.1.1. Funcțiile răspunsului în frecvență

Ecuția mișcării (armonice a) masei sistemului din figura 2.7 se poate scrie sub forma

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega} \dot{x} + kx = \hat{f} e^{i\omega t}, \quad (2.26)$$

unde m este masa, k — constanta elastică, h — coeficientul de amortizare histeretică echivalentă, x — deplasarea masei, ω — pulsația perturbatoare, t — timpul, \hat{f} — amplitudinea forței perturbatoare.

Răspunsul staționar (măsurat după ce componenta tranzitorie s-a amortizat) poate fi exprimat ca deplasare, viteză sau accelerație, sub una din următoarele forme :

$$x(t) = \hat{x} e^{i(\omega t + \varphi_d)} = \tilde{x} e^{i\omega t},$$

$$\dot{x}(t) = \hat{\dot{x}} e^{i(\omega t + \varphi_v)} = \tilde{\dot{x}} e^{i\omega t}, \quad (2.27)$$

$$\ddot{x}(t) = \hat{\ddot{x}} e^{i(\omega t + \varphi_a)} = \tilde{\ddot{x}} e^{i\omega t},$$

unde φ_d , φ_v și φ_a sînt defazajele față de forță.

Între mărimile din expresiile (2.27) se stabilesc relațiile

$$\tilde{\dot{x}} = i\omega \tilde{x} = -\omega^2 \tilde{\ddot{x}},$$

$$\hat{\ddot{x}} = \omega \hat{\dot{x}} = \omega^2 \hat{x}, \quad (2.28)$$

$$\varphi_a = \varphi_v + \frac{\pi}{2} = \varphi_d + \pi.$$

Tabela 2.1.

Funcția de răspuns în frecvență (transmitanța)	Relația de definiție	Simbolul	Funcția complexă	Modulul funcției	Unghiul de fază
Receptanța (admitanța, complianța)	$\frac{\text{deplasare}}{\text{forță}}$	α	$\bar{\alpha} = \frac{\tilde{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \Omega^2 + ig}$	$\hat{\alpha} = \frac{\hat{x}}{\hat{f}} = \frac{1/k}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}}$	$\varphi_{\alpha} = \arctg \frac{-g}{1 - \Omega^2}$
Mobilitatea	$\frac{\text{viteză}}{\text{forță}}$	\mathcal{M}	$\bar{\mathcal{M}} = \frac{\tilde{\dot{x}}}{\hat{f}} = \frac{1}{\sqrt{km}g} \frac{\Omega}{i(1 - \Omega^2)}$	$\hat{\mathcal{M}} = \frac{\hat{\dot{x}}}{\hat{f}} = \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{\Omega}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}}$	$\varphi_{\mathcal{M}} = \arctg \frac{1 - \Omega^2}{g}$
Inertanța	$\frac{\text{acelerație}}{\text{forță}}$	η	$\bar{\eta} = \frac{\tilde{\ddot{x}}}{\hat{f}} = -\frac{1}{m} \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 + ig}$	$\hat{\eta} = \frac{\hat{\ddot{x}}}{\hat{f}} = \frac{1}{m} \frac{\Omega^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}}$	$\varphi_{\eta} = \varphi_{\alpha} + \pi$
Obstructanța (refuzanța, constanta elastică dinamică)	$\frac{\text{forță}}{\text{deplasare}}$	β	$\bar{\beta} = \frac{\tilde{f}}{\hat{x}} = k(1 - \Omega^2 + ig)$	$\hat{\beta} = \frac{\hat{f}}{\hat{x}} = k\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}$	$\psi_{\beta} = \arctg \frac{g}{1 - \Omega^2}$
Impedanța mecanică	$\frac{\text{forță}}{\text{viteză}}$	Z	$\bar{Z} = \frac{\tilde{f}}{\hat{\dot{x}}} = \sqrt{km} \frac{g + i(\Omega^2 - 1)}{\Omega}$	$\hat{Z} = \frac{\hat{f}}{\hat{\dot{x}}} = \sqrt{km} \frac{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}}{\Omega}$	$\psi_{\beta} = \arctg \frac{\Omega^2 - 1}{g}$
Masa aparentă	$\frac{\text{forță}}{\text{acelerație}}$	μ	$\bar{\mu} = \frac{\tilde{f}}{\hat{\ddot{x}}} = -m \frac{1 - \Omega^2 + ig}{\Omega^2}$	$\hat{\mu} = \frac{\hat{f}}{\hat{\ddot{x}}} = m \frac{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}}{\Omega^2}$	$\psi_{\mu} = \psi_{\beta} + \pi$
Transmisibilitatea forței	$\frac{\text{forța transmisă}}{\text{forța aplicată}}$	τ	$\bar{\tau} = \frac{\tilde{f}_T}{\hat{f}} = \frac{1 + ig}{1 - \Omega^2 + ig}$	$\hat{\tau} = \frac{\hat{f}_T}{\hat{f}} = \sqrt{\frac{1 + g^2}{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}}$	$\varphi_{\tau} = \arctg \frac{-g\Omega^2}{1 - \Omega^2 + g^2}$

Funcțiile complexe de răspuns în frecvență sînt date în tabela 2.1 în funcție de pulsația adimensională

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$$

(unde $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ este pulsația proprie a sistemului conservativ asociat) și de factorul de amortizare histeretică echivalentă $g = \frac{h}{k}$.

2.2.1.2. Identificarea pe baza diagramei receptanței

Metoda amplitudinii maxime

Variația modului receptanței complexe cu pulsația este ilustrată prin *curba de rezonanță* din figura 2.8. De obicei aceasta se obține menținînd $\hat{f} = \text{const.}$ și reprezentînd grafic variația amplitudinii deplasării \hat{x} cu pulsația.

Rezonanța amplitudinii apare la pulsația $\omega_{\text{rez}} = \omega_n$, la care receptanța are valoarea maximă $\alpha_{\text{rez}} = \frac{1}{h}$.

Dacă $\omega_{1\varepsilon}$ și $\omega_{2\varepsilon}$ sînt pulsațiile la care amplitudinea răspunsului este $\frac{1}{\varepsilon} \alpha_{\text{rez}}$, unde $1 < \varepsilon < \sqrt{2}$, factorul de amortizare g se poate calcula cu relația [46]

$$g = \frac{\omega_{2\varepsilon}^2 - \omega_{1\varepsilon}^2}{2\omega_n^2 \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (2.29)$$

care, pentru sisteme slab amortizate, la care $\omega_{1\varepsilon} \cong \omega_{2\varepsilon} \cong \omega_n$, devine

$$g \cong \frac{\omega_{2\varepsilon} - \omega_{1\varepsilon}}{\omega_n \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{\Delta\omega_\varepsilon}{\omega_n \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (2.29, a)$$

Dacă se intersectează curba de rezonanță cu linii horizontale, corespunzătoare la diferite valori ε , și se reprezintă grafic variația raportului $\frac{\Delta\omega_\varepsilon}{\omega_n}$ în funcție de $\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ (fig. 2.9), panta dreptei trasate prin punctele astfel obținute este egală cu g .

Pentru $\varepsilon = \sqrt{2}$, punctele B_ε și C_ε se confundă cu *punctele de semiputere*, de pulsații $\omega_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \mp g}$, la care puterea disipată prin amortizare este jumătate din cea disipată la rezonanță. Factorul de amortizare se calculează cu relația [18]

$$g = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_n^2} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \quad (2.30)$$

care, pentru sisteme slab amortizate, devine

$$g \cong \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} = \frac{\Delta\omega}{\omega_n}. \quad (2.31)$$

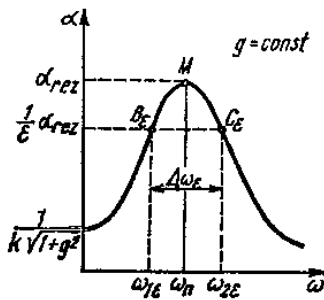


Fig. 2.8

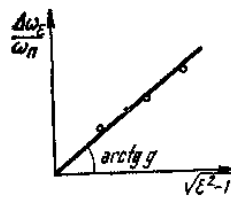


Fig. 2.9

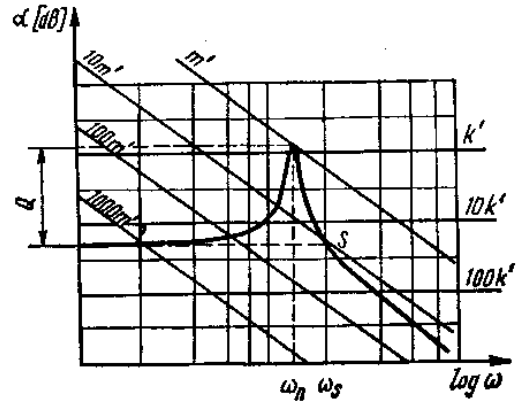


Fig. 2.10

Constanta elastică se calculează pe baza valorii receptanței la rezonanță

$$k = \frac{1}{g \alpha_{rez}}. \quad (2.32)$$

iar masa, din relația

$$m = \frac{k}{\omega_n^2}. \quad (2.33)$$

Uneori este avantajos să se reprezinte curba din figura 2.8 în coordonate logaritmice (fig. 2.10).

Dacă curba este trasată pentru un domeniu relativ larg de frecvențe în afara rezonanței, se poate calcula *factorul de calitate* $Q = \frac{1}{g}$ ca diferență (datorită scării logaritmice) între ordonata la rezonanță și ordonata la $\omega = 0$. Dacă informația la frecvențe joase este insuficientă, se poate folosi aceeași metodă observînd că ordonata curbei receptanței la pulsația $\omega_s = \sqrt{2}\omega_n$ este egală cu ordonata la $\omega = 0$.

Cînd se dispune doar de o mică parte a curbei în vecinătatea rezonanței, se determină punctele de semiputare la 3dB sub nivelul receptanței la rezonanță și se calculează amortizarea cu formula (2.31).

În general, se recomandă folosirea unor diagrame cu un caroiaj special, pe care sînt trasate linii cu panta -12dB/octavă , corespunzînd răspunsului unor elemente pur inerțiale (mase pure), liniile orizontale reprezentînd receptanța unor elemente pur elastice (arcuri). Cu ajutorul acestora, ducînd asimptote la curba de rezonanță, se determină direct valoarea masei m și a constantei elastice k (pentru amortizare mică) [33].

Metoda diagramei defazajului

Variația argumentului receptanței complexe cu pulsația este prezentată în figura 2.11. *Rezonanța fazei* apare la pulsația ω_n la care $\varphi_a = -90^\circ$. Punctele de semiputere B și C , de pulsații ω_1 și ω_2 , corespund unor defazaaje de -45° , respectiv -135° , astfel că factorul de amortizare g se calculează cu formula (2.30).

Amortizarea se poate calcula și cu relația [85]

$$g = \frac{2}{\omega_n \left(-\frac{d\varphi_a}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n}} \quad (2.34)$$

în care $\left(\frac{d\varphi_a}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n}$ este panta tangentei la curba defazajului în punctul

M , de pulsație ω_n , în care curba are un punct de inflexiune, $\frac{d^2\varphi_a}{d\omega^2} = 0$.

Diagrama defazajului nu oferă însă informații pentru determinarea parametrilor k și m .

Metoda diagramei componentei reale a receptanței

Variația cu pulsația a componentei reale a receptanței $\alpha_R = \frac{\hat{x}}{f} \cos \varphi_a$

este arătată în figura 2.12. Pulsația de rezonanță corespunde punctului M în care curba intersectează axa absciselor, unde $\alpha_R = 0$. Valorile extreme ale funcției $\alpha_R(\omega)$ se obțin în punctele de semiputere B și C , în dreptul cărora se determină pulsațiile ω_1 și ω_2 . Factorul de amortizare g se calculează apoi cu formulele (2.30).

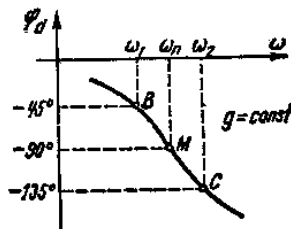


Fig. 2.11

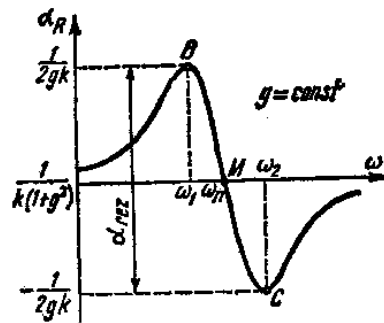


Fig. 2.12

Rezonanța corespunde și punctului de inflexiune de pe porțiunea BC a curbei, unde $\frac{d^2\alpha_R}{d\omega^2} = 0$. Dacă se calculează panta tangentei la curbă în acest punct $\left(\frac{d\alpha_R}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n}$ și distanța α_{rez} între tangentele la

curbă în punctele B și C , factorul de amortizare se calculează cu relația [93].

$$g = \frac{2\alpha_{rez}}{\omega_n \left(-\frac{d\alpha_R}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n}} \quad (2.35)$$

Metoda diagramei componentei imaginare a receptanței

În figura 2.13 se prezintă curba variației cu frecvența a componentei imaginare a receptanței $\alpha_I = \frac{\hat{x}}{\hat{f}} \sin \varphi_d$.

Pulsația de rezonanță corespunde punctului M , de amplitudine maximă. Pulsațiile ω_1 și ω_2 corespund punctelor de semiputere B și C , în care receptanța este jumătate din cea la rezonanță. Parametrii sistemului se pot calcula deci cu relațiile (2.30), (2.32) și (2.33).

Amortizarea se poate calcula folosind și diagrama componentei reale a receptanței, cu relația

$$g = \frac{2(\alpha_I)_{\omega=\omega_n}}{\omega_n \left(-\frac{d\alpha_R}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n}} \quad (2.36)$$

Metoda diagramei polare a receptanței complexe

Dacă se elimină pulsația ω între expresiile componentei reale α_R și a celei imaginare α_I ale receptanței complexe, se obține un cerc (fig. 2.14, a) de ecuație

$$\left(\alpha_I + \frac{1}{2h} \right)^2 + \alpha_R^2 = \left(\frac{1}{2h} \right)^2 \quad (2.37)$$

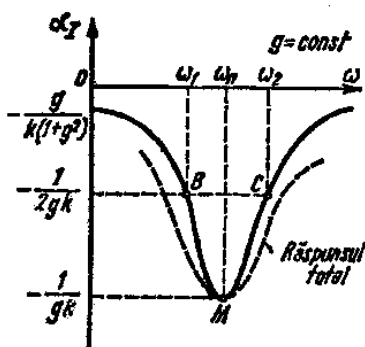


Fig. 2.13

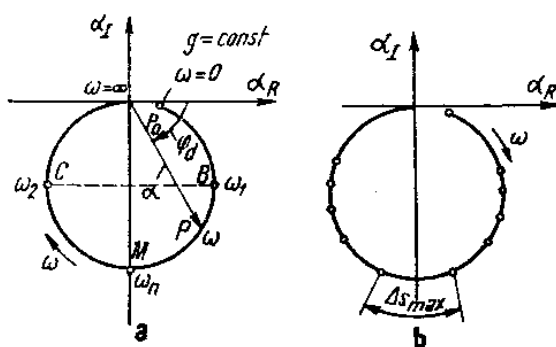


Fig. 2.14

Acesta este locul geometric al extremității vectorului receptanței $\bar{\alpha}$ în planul complex, numit *diagramă polară*, *diagramă Nyquist* sau *loc (geometric) de transfer*.

Fiecărui punct P de pe cerc îi corespunde o anumită pulsație ω . La $\omega = 0$, vârful vectorului este în punctul $P_0 \left[\frac{1}{(1+g^2)k}, \frac{-g}{(1+g^2)k} \right]$.

Odată cu creșterea pulsației ω , punctul P parcurge cercul în sens orar, iar pentru $\omega \rightarrow \infty$ se confundă cu originea O .

Atît rezonanța amplitudinii, cît și cea a fazei, apar în punctul M , de pulsație ω_n , la intersecția cercului cu semiaxa imaginară negativă.

Diametrul cercului este $\overline{OM} = \frac{1}{h}$. Trasînd diametrul perpendicular pe

OM , acesta intersectează cercul în punctele de semiputere B și C , unde se determină pulsațiile ω_1 și ω_2 . Factorul de amortizare se calculează apoi cu formulele (2.30).

Kennedy și Pancu [61] au arătat că dacă sistemul din figura 2.7 este excitat cu o forță armonică de amplitudine constantă, iar răspunsul se notează punct cu punct, corespunzător unor creșteri $\Delta\omega$ ale pulsației excitatoare și se unesc punctele printr-o curbă continuă, lungimea arcului de cerc Δs între două puncte consecutive este maximă la rezonanță (fig. 2.14, b).

Acest criteriu de localizare a rezonanței se bazează pe faptul că derivata

$$\frac{ds}{d\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} = -\frac{1}{gk} \frac{d\varphi_d}{d\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{1}{k \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + g^2 \right]} = k\alpha^2 \quad (2.38)$$

are valoare maximă la $\omega = \omega_n$. În relațiile (2.38), ds este lungimea arcului de cerc corespunzător unei variații $d\varphi_d$ a unghiului de fază (fig. 2.15) :

$$ds = (\text{raza}) \times (\text{unghiul la centru}) = \frac{1}{2gk} (2 d\varphi_d) = \frac{d\varphi_d}{gk};$$

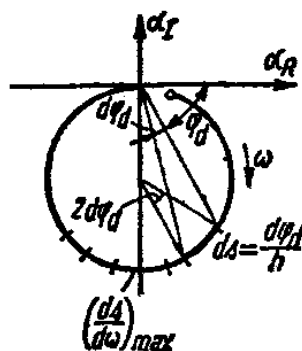


Fig. 2.15

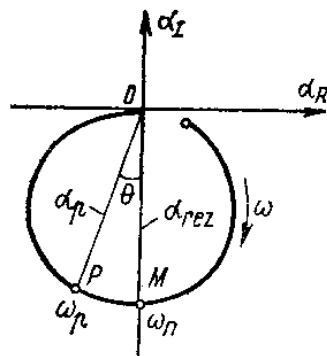


Fig. 2.16

Pe diagrama din figura 2.16 s-a notat cu θ unghiul dintre vectorii $\overline{OP} = \alpha_p$ și $\overline{OM} = \alpha_{rez}$, corespunzător punctelor P și M , de pulsații ω_p și ω_n .

Factorul de amortizare se poate calcula cu relația

$$g = \left| 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_n}\right)^2 \right| \cotg \theta. \quad (2.39)$$

O formulă similară a fost utilizată de Natke [77]

$$g = \left| 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_n} \right)^2 \right| \left(\left| \frac{\alpha_{rez}}{\alpha_p} \right|^2 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.40)$$

Dacă se notează

$$\omega_p = \omega_n + \Delta\omega$$

se obține formula propusă de Wolfe și Kirkby [136] pentru sisteme slab amortizate

$$g \cong \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \left(2 + \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \right) \cotg \theta. \quad (2.41)$$

O formulă similară cu (2.40) au folosit Kennedy și Pancu [61] tot pentru sisteme slab amortizate

$$g \cong 2 \frac{\alpha_p}{\alpha_{rez}} \left| \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \right| \left(1 - \left| \frac{\alpha_p}{\alpha_{rez}} \right|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.42)$$

În toate cazurile, pentru determinarea factorului de amortizare g , se folosesc mărimi și rapoarte adimensionale, deci nu este necesară o etalonare a sistemului de măsură. Aceasta devine necesară abia la calculul constantei elastice k și a masei m .

Alte metode de identificare, bazate pe analiza grafică a diagramelor polare, sînt descrise în paragraful 5.3.5.

2.2.1.3. Identificarea pe baza diagramei mobilității

Metoda diagramei amplitudine-frecvență

În figura 2.17 se prezintă curba variației cu pulsația a modului funcției mobilității complexe (v. tabela 2.1). Valoarea maximă

$$\mathcal{M}_{\max} = \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{1+g^2}-1)}}$$

se înregistrează la pulsația $\omega_{r_v} = \omega_n \sqrt{1+g^2}$.

Pulsația ω_n corespunde punctului T în care o dreaptă care trece prin origine este tangentă la curba de rezonanță și în care mobilitatea are valoarea $\mathcal{M}_T = \frac{1}{\sqrt{km}} \cdot \frac{1}{g}$.

Dacă se intersectează curba din figura 2.17 cu dreapta (Δ), de ecuație $\mathcal{M} = a\omega$, se obțin punctele P și Q . Între pulsațiile ω_p și ω_q ale acestor

puncte se pot stabili relațiile

$$\omega_q^2 + \omega_p^2 = 2\omega_n^2, \quad (2.43)$$

$$\omega_q^2 - \omega_p^2 = 2\omega_n^2 \sqrt{\frac{1}{a^2 k^2} - g^2}.$$

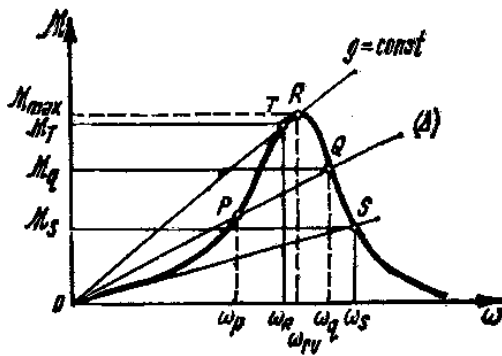


Fig. 2.17

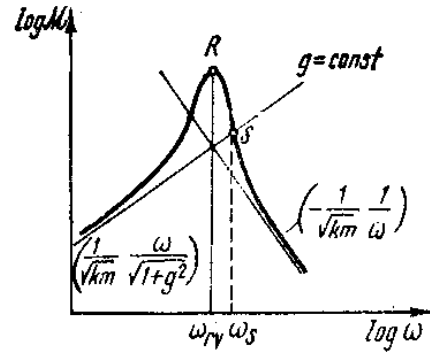


Fig. 2.18

Fie M_q valoarea mobilității la pulsația ω_q . Deoarece

$$a = \frac{M_q}{\omega_q}, \quad \frac{1}{kg} = \frac{M_T}{\omega_n},$$

dacă se notează

$$e = \frac{M_T}{M_q} \frac{\omega_q}{\omega_n}, \quad (2.44)$$

se obține următoarea formulă a factorului de amortizare :

$$g = \frac{\omega_q^2 - \omega_p^2}{\omega_q^2 + \omega_p^2} \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}. \quad (2.45)$$

Dreapta OS , tangentă în origine la curba de rezonanță, are panta $\frac{1}{k\sqrt{1+g^2}}$ și intersectează curba în punctul S , de pulsație $\omega_s = \sqrt{2}\omega_n$.

Formula (2.45) se reduce în acest caz la

$$g = \frac{1}{\sqrt{2e_0^2 - 1}} \quad (2.40)$$

unde $e_0 = \frac{M_T}{M_S}$ este raportul mobilităților în punctele T și S .

Constanta elastică rezultă apoi din relația

$$k = \frac{\omega_n}{g M_T}. \quad (2.47)$$

Metoda dă rezultate bune la sisteme cu frecvență proprie relativ joasă și amortizare mare, la care, pe diagramă, originea nu este situată departe de zona de rezonanță. Se recomandă reprezentarea curbei în coordonate logaritmice (fig. 2.18). În acest caz, deși originea pulsațiilor nu este localizată, dreapta OS coincide cu asimptota la ramura de joasă frecvență a curbei. O precizie satisfăcătoare se obține determinând punctul T prin tangenta la curbă paralelă cu OS . În majoritatea situațiilor, însă, punctul T nu poate fi distins de punctul de mobilitate maximă R .

Metoda diagramei fază-frecvență

În figura 2.19 se arată variația cu pulsația a defazajului între forță și viteza masei sistemului din figura 2.7. La rezonanța de fază $\omega = \omega_n$ și $\varphi_v = 0$, deci pulsația de rezonanță poate fi determinată la intersecția diagramei defazajului cu linia $\varphi_v = 0$, în punctul M .

Intersectînd diagrama cu liniile $\varphi_v = \pm 45^\circ$ se obțin punctele B și C , de pulsații $\omega_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \mp g}$, cu ajutorul cărora factorul de amortizare g se calculează folosind formulele (2.30).

Dacă se dispune doar de o mică parte a curbei defazajului în vecinătatea rezonanței, factorul de amortizare se poate calcula cu relația (2.34) în care se înlocuiește φ_a prin φ_v .

Metoda diagramei componentei reale a mobilității

Variația cu pulsația a componentei reale $M_R = M \cos \varphi_v$ a mobilității este arătată (pentru o valoare particulară g) în figura 2.20.

Tangenta OT determină punctul T , de pulsație ω_n , în care componenta reală a mobilității are valoarea $M_T = \frac{1}{g\sqrt{km}}$. Dreapta (Δ) intersectează curba în punctele P și Q , de pulsații ω_p și ω_q .

Factorul de amortizare g se calculează cu relația

$$g = \frac{\omega_q^2 - \omega_p^2}{\omega_q^2 + \omega_p^2} \frac{1}{\sqrt{e_R - 1}} \quad (2.48)$$

în care

$$e_R = \frac{M_T}{M_{Rq}} \frac{\omega_q}{\omega_n}, \quad (2.49)$$

unde M_{Rq} este ordonata curbei la pulsația ω_q .

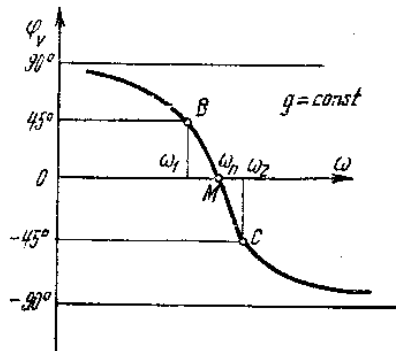


Fig. 2.19

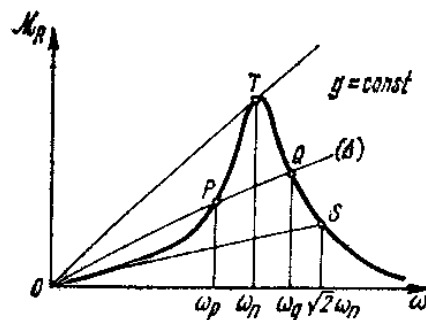


Fig. 2.20

Dacă se folosește tangenta la curbă în origine, OS , punctul S are o abscisă $\omega_s = \sqrt{2}\omega_n$, iar formula (3.48) devine

$$g = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} \frac{\mathcal{M}_T}{\mathcal{M}_{R_s}} - 1}} \quad (2.50)$$

unde \mathcal{M}_{R_s} este ordonata punctului S , iar \mathcal{M}_T ordonata punctului T . Constanta elastică se calculează apoi cu relația (2.47).

Metoda diagramei componente imaginare a mobilității

În figura 2.21 se prezintă o curbă de variație cu pulsația a componente imaginare $\mathcal{M}_I = \mathcal{M} \sin \varphi_v$ a mobilității complexe. Curbă intersec-tează axa absciselor la pulsația ω_n . Panta tangentei la curbă în punctul de intersecție este

$$\left(\frac{d\mathcal{M}_I}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n} = -\frac{2}{kg^2}. \quad (2.51)$$

Din relația (2.51) nu se poate obține o formulă pentru calculul amori-tizării, deoarece nu se cunoaște k .

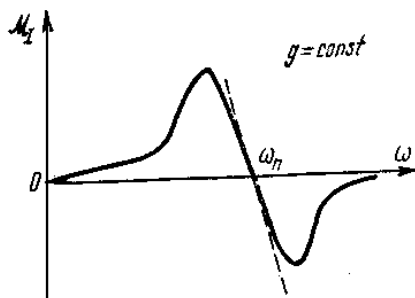


Fig. 2.21

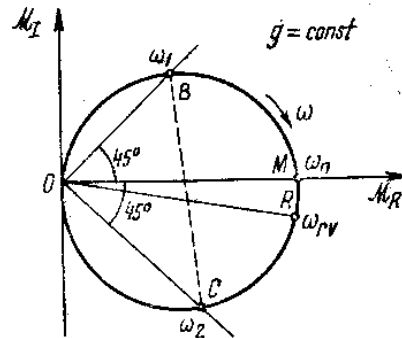


Fig. 2.22

Apelînd și la diagrama componente reale a mobilității (fig. 2.20), se poate stabili formula

$$g = \frac{2(\mathcal{M}_R)_{\omega=\omega_n}}{\omega_n \left(-\frac{d\mathcal{M}_I}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n}} \quad (2.52)$$

Metoda diagramei polare a mobilității

Dacă se elimină pulsația ω între expresiile componentelor vectoriale \mathcal{M}_R și \mathcal{M}_I ale mobilității complexe, se obține o curbă (fig. 2.22) de ecuație

$$(\mathcal{M}_R^2 + \mathcal{M}_I^2)^2 - \frac{\mathcal{M}_R^2}{g^2 km} + \frac{\mathcal{M}_R \mathcal{M}_I}{gkm} = 0 \quad (2.53)$$

care poate fi aproximată cu un cerc doar pentru valori mici ale amortizării.

Razele vectoriale OB și OC , care fac unghiuri de 45° cu axa reală, determină pe diagrama polară pulsațiile $\omega_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \mp g}$, cu ajutorul cărora factorul de amortizare g se calculează folosind prima relație (2.30)

$$g = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}.$$

Curba intersectează axa reală în punctul M , de pulsație ω_n . Măsurând segmentul \overline{OM} se poate calcula $k = \frac{\omega_n}{g \overline{OM}}$, apoi $m = \frac{k}{\omega_n^2}$.

La sisteme puternic amortizate, punctul R , de răspuns maxim, se poate localiza precis pe diagramă, determinând apoi pulsația ω_{rv} . Factorul de amortizare se calculează cu relația

$$g = \sqrt{\left(\frac{\omega_{rv}}{\omega_n}\right)^4 - 1}. \quad (2.54)$$

2.2.1.4. Identificarea pe baza diagramei inertanței

Metoda diagramei amplitudine-frecvență

Variația moduluiu inertanței complexe (v. tabela 2.1) cu pulsația este ilustrată prin curba din figura 2.23, care de obicei se trasează ca diagramă de variație a accelerației cu frecvența, în cazul excitației cu forță armonică de amplitudine constantă.

Rezonanța accelerației apare la pulsația $\omega_{ra} = \omega_n \sqrt{1 + g^2}$, la care inertanța are valoarea maximă

$$\eta_{\max} = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1}{g^2} + 1}. \quad (2.55)$$

Pulsațiile punctelor B' și C' , la care inertanța este $\frac{1}{\sqrt{2}} \eta_{\max}$ au respectiv valorile

$$\omega' = \omega_n \sqrt{\frac{1 + g^2}{1 + g}}, \quad \omega'' = \omega_n \sqrt{\frac{1 + g^2}{1 - g}}. \quad (2.56)$$

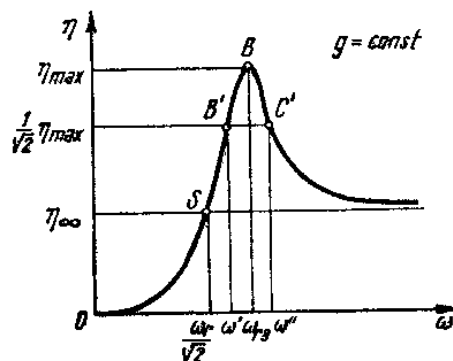


Fig. 2.23

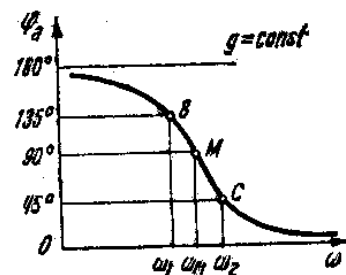


Fig. 2.24

Rezultă că factorul de amortizare g se poate calcula cu relația

$$g = \frac{\omega''^2 - \omega'^2}{\omega''^2 + \omega'^2}. \quad (2.57)$$

Masa se calculează apoi din (2.55) iar constanta elastică din relația

$$k = \frac{m}{1 + g^2} \omega_{ra}^2. \quad (2.58)$$

Asimptota $\eta_\infty = \frac{1}{m}$ intersectează curba în punctul S , de pulsație $\omega_s = \frac{\omega_{ra}}{\sqrt{2}}$. Factorul de amortizare se poate calcula și cu relația

$$g = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}, \quad (2.59)$$

unde $\varepsilon = \frac{\eta_{\max}}{\eta_\infty}$. Formula (2.59) este utilă în special când curba din figura 2.23 este reprezentată în coordonate logaritmice.

Metoda diagramei defazaj-frecvență

Variația argumentului inertanței complexe cu pulsația este reprezentată în figura 2.24. Intersectînd curba cu dreapta $\varphi_a = 90^\circ$ se obține punctul M , de pulsație ω_n . La intersecția curbei cu dreptele $\varphi_a = 135^\circ$ și respectiv $\varphi_a = 45^\circ$, se obțin punctele B și C , de pulsații $\omega_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \mp g}$. Pe baza acestor valori, amortizarea se calculează cu formula

$$g = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}. \quad (2.60)$$

Metoda diagramei polare a inertanței

Diagrama polară a inertanței complexe (fig. 2.25) este un cerc de ecuație

$$\left(\eta_R - \frac{1}{2m} \right)^2 + \left(\eta_I - \frac{1}{2gm} \right)^2 = \frac{1 + g^2}{4g^2m^2} \quad (2.61)$$

care se obține eliminînd pulsația între expresiile componentelor vectoriale $\eta_R = \eta \cos \varphi_a$ și $\eta_I = \eta \sin \varphi_a$ ale inertanței.

La intersecția cu axa imaginară rezultă punctul M , de pulsație ω_n , corespunzătoare rezonanței de fază. Diametrul OR , egal cu inertanța maximă, face cu coarda $OM = \frac{1}{mg}$ un unghi $\theta = \text{arctg } g$, care pentru

amortizări mici poate fi neglijat. Punctul R se poate localiza, folosind metoda Kennedy — Panu, în zona unde unor creșteri egale $\Delta\omega$ ale pulsației, le corespunde un arc de cerc de lungime maximă.

Diametrul $B'C'$, perpendicular pe OR , determină pe cerc pulsațiile ω' și ω'' date de relațiile (2.56), cu ajutorul cărora factorul de amortizare g se calculează cu formula (2.57).

Masa se calculează cu relația

$$m = \frac{1}{g \cdot OM}, \quad (2.62)$$

după care constanta elastică rezultă din expresia $k = m\omega_n^2$.

O altă metodă se bazează pe construcția din figura 2.26.

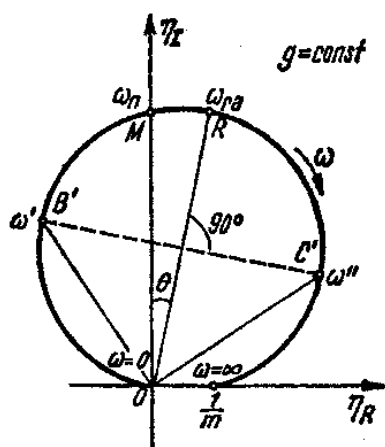


Fig. 2.25

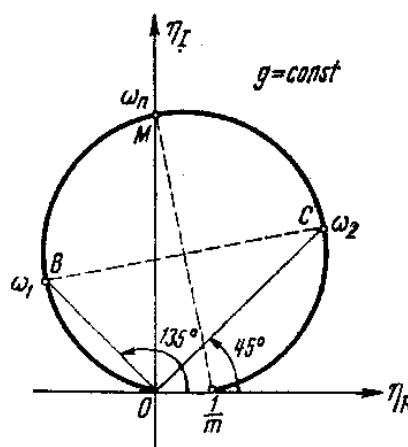


Fig. 2.26

Coardele OC și OB care fac unghiuri de 45° , respectiv 135° , cu semi-axa reală pozitivă, determină pe cerc pulsațiile $\omega_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \mp g}$ cu care amortizarea se calculează folosind relația (2.60).

2.2.1.5. Identificarea pe baza diagramei obstructanței

Metoda amplitudinii minime

În figura 2.27 se prezintă graficul variației cu pulsația a modulului obstructanței (v. tabela 2.1). Această diagramă se obține în măsurări la care se menține constantă amplitudinea deplasării armonice și se reprezintă variația cu frecvența a amplitudinii forței excitatoare.

La rezonanță, forța necesară pentru a menține o deplasare de amplitudine constantă are valoarea minimă, iar $\beta_{\min} = kg = h$. Punctului

M îi corespunde pulsația $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Dreapta de ecuație $\beta = \sqrt{2} \beta_{\min}$

intersectează curba în punctele B și C , de abscise $\omega_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \mp g}$. Factorul de amortizare se calculează cu relațiile (2.30). Constanta elastică

$$k = \frac{\beta_{\min}}{g}, \quad \text{iar masa } m = \frac{k}{\omega_n^2}.$$

Metoda diagramei polare

Diagrama polară a obstructanței complexe este o linie dreaptă de ecuație $\beta_I = h$, deci paralelă cu axa reală (fig. 2.28). Ea intersectează axa imaginară în punctul M , de pulsație ω_n . La intersecția dreptei cu liniile OB și OC , înclinate cu 45° , respectiv 135° față de semiaxa reală pozitivă, se determină pulsațiile punctelor de semiputere ω_1 și ω_2 , cu care se poate calcula amortizarea folosind relațiile (2.30).

Dacă se intersectează dreapta obstructanței cu un arc de cerc de rază $\overline{ON} = \varepsilon \overline{OM}$, se determină pulsațiile ω_p și ω_q , pe baza cărora factorul de amortizare g se calculează cu relația

$$g = \frac{\omega_q^2 - \omega_p^2}{\omega_q^2 + \omega_p^2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}. \quad (2.63)$$

Pentru o precizie mai mare a rezultatelor, se recomandă determinarea valorii lui g pentru diverse rapoarte ε .

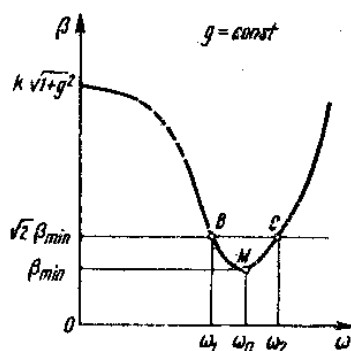


Fig. 2.27

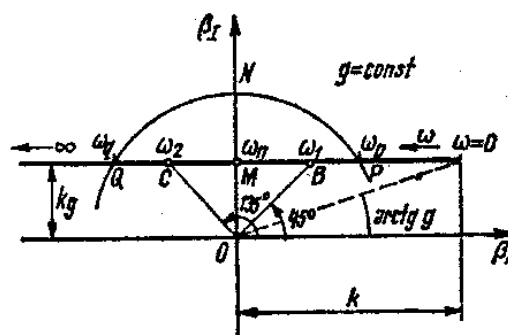


Fig. 2.28

Orice abatere a diagramei obstructanței de la forma din figura 2.28 indică invaliditatea modelului de calcul ales, în special în ceea ce privește amortizarea.

2.2.1.6. Identificarea pe baza diagramei impedanței mecanice

Metoda diagramei amplitudine-frecvență

Variația modulului impedanței mecanice (v. tabela 2.1) cu pulsația este reprezentată în figura 2.29. De obicei diagrama ilustrează variația amplitudinii forței de excitație într-un baleiaj de frecvență la care se menține constantă amplitudinea vitezei.

Rezonanța apare în punctul R , de abscisă $\omega_{rv} = \omega_n \sqrt{1 + g^2}$ și ordonată minimă $Z_{\min} = \sqrt{km} \sqrt{2(\sqrt{1 + g^2} - 1)}$.

Tangenta OT la curbă definește punctul T , de abscisă $\omega_t = \omega_n \sqrt{1 + g^2}$ și ordonată $Z_t = g \sqrt{km}$. Asimptota OS intersectează curba în punctul S , de abscisă $\omega_s = \frac{\omega_t}{2}$ și ordonată $Z_s = \sqrt{km} \sqrt{\frac{1 + g^2}{2}}$. Panta dreptei OS

este $\arctg m$. Dacă se notează $\varepsilon = \frac{Z_s}{Z_t}$, factorul de amortizare g rezultă din relația

$$g = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon^2 - 1}}. \quad (2.64)$$

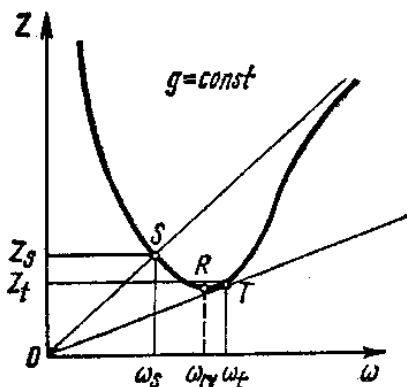


Fig. 2.29

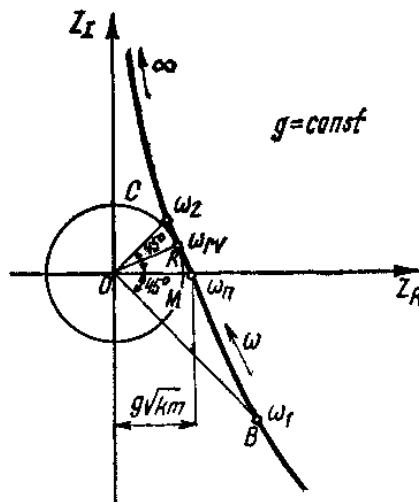


Fig. 2.30

Masa m se calculează ca panta dreptei OS , $m = \frac{Z_s}{\omega_s}$.

Pentru aplicarea metodei se recomandă trasarea curbei în coordonate logaritmice.

Metoda diagramei polare

Diagrama polară a impedanței mecanice complexe este o curbă de ecuație

$$Z_R^2 + gZ_R Z_I - g^2 km = 0, \quad (2.65)$$

reprezentată în figura 2.30.

Ecuația (2.65) se obține eliminând pulsația între expresiile componentelor vectoriale $Z_R = Z \cos \psi_\omega$ și $Z_I = Z \sin \psi_\omega$ ale impedanței mecanice complexe.

Curba intersectează axa reală în punctul M , de pulsație ω_n , corespunzător rezonanței de fază. Rezonanța amplitudinii apare în punctul R , de pulsație $\omega_{r,n}$, care se determină trasînd cercul cu centrul în origine, tangent la curbă.

Dreptele OC și OB , care fac unghiuri de $\pm 45^\circ$ cu semiaxa reală pozitivă, determină pe curbă pulsațiile $\omega_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \mp g}$, cu care se calculează factorul de amortizare din relațiile (2.30).

Masa se calculează cu relația $m = \frac{OM}{g\omega_n}$, iar $k = m \omega_n^2$.

2.2.1.7. Identificarea pe baza diagramei masei aparente

Metoda diagramei amplitudine-frecvență

Variația cu pulsația a modulului funcției complexe a masei aparente (v. tabela 2.1) este prezentată în figura 2.31. Amortizarea se poate calcula cu metoda punctelor de semiputere. Pulsația de rezonanță a accelerației $\omega_{ra} = \omega_n \sqrt{1+g^2}$ este abscisa punctului R , de ordonată minimă $\mu_{min} = m \frac{g}{\sqrt{1+g^2}}$

Intersectînd curba cu dreapta $\mu = \frac{\mu_{min}}{\sqrt{2}}$ se obțin punctele B' și C' , de pulsație ω' , respectiv ω'' , date de expresiile (2.56).

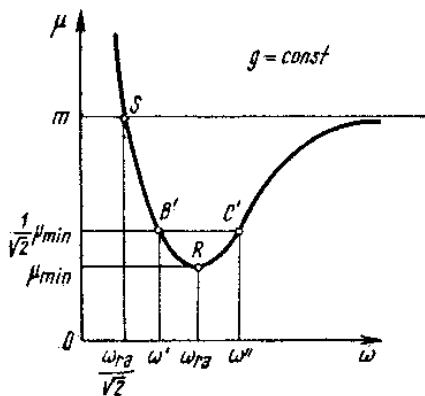


Fig. 2.31

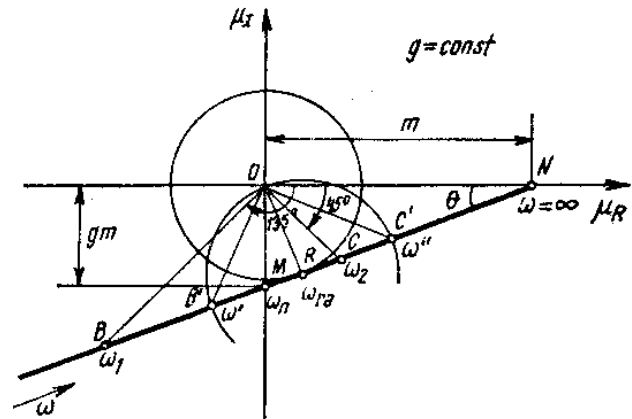


Fig. 2.32

Factorul de amortizare g se calculează cu relația (2.57), masa cu relația $m = \mu_{min} \frac{\sqrt{1+g^2}}{g}$, iar constanta elastică din expresia $k = \frac{m}{1+g^2} \omega_{ra}^2$.

Metoda diagramei polare

Eliminînd pulsația între expresiile componentei reale $\mu_R = \mu \cos \psi_a$ și a celei imaginare $\mu_I = \mu \sin \psi_a$ ale masei aparente complexe, se obține ecuația unei drepte [16]

$$\mu_R - \frac{1}{g} \mu_I - m = 0, \quad (2.66)$$

reprezentată grafic în figura 2.32.

La intersecția cu semiaxa imaginară negativă se determină pulsația ω_n . Cercul cu centrul în origine, tangent la această dreaptă, determină punctul R de pulsație ω_{ra} . Cercul cu centrul în R și rază OR intersectează dreapta masei aparente în punctele B' și C' , de pulsații ω' și ω'' , pe baza cărora factorul de amortizare g se calculează din relația (2.57).

Liniiile OC și OB , care fac unghiuri de 45° , respectiv 135° cu semiaxa reală pozitivă, determină pulsațiile ω_2 și ω_1 , pe baza cărora amortizarea se calculează cu formula (2.60).

Masa m rezultă din relația $m = \frac{OM}{g}$, iar constanta elastică $k = m \omega_n^2$.

2.2.1.8. Identificarea pe baza diagramei transmisibilității forței

În figura 2.33 se prezintă diagrama polară a transmisibilității complexe. Aceasta este un cerc de ecuație [90]

$$\left(\tau_R - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\tau_I + \frac{1}{2g}\right)^2 = \frac{1+g^2}{4g^2}. \quad (2.67)$$

Valoarea maximă a transmisibilității $\overline{OM} = \sqrt{\frac{1}{g^2} + 1}$ corespunde pulsației ω_n , care poate fi determinată cu criteriul Kennedy-Pancu, în zona unde unor creșteri egale $\Delta\omega$ ale pulsației excitatoare le corespunde un arc de cerc Δs de lungime maximă.

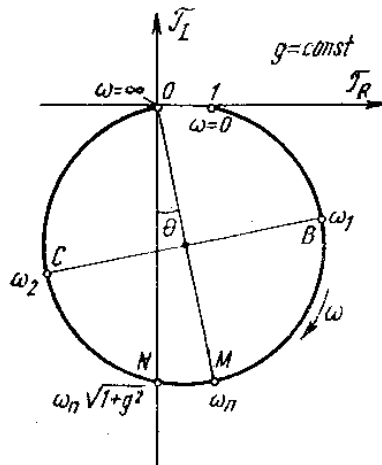


Fig. 2.33

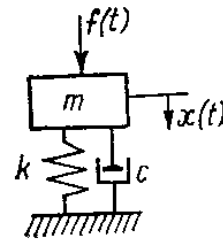


Fig. 2.34

Diametrul OM face cu semiaxa imaginară negativă unghiul $\theta = \arctg g$. Diametrul BC , perpendicular pe OM , determină pe cerc pulsațiile $\omega_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \mp g}$, cu ajutorul cărora amortizarea se calculează din relațiile (2.30). Ceilalți parametri nu se pot determina în acest caz.

2.2.2. Identificarea parametrilor sistemului cu amortizare viscoasă liniară

2.2.2.1. Funcțiile răspunsului în frecvență

Ecuația mișcării masei sistemului din figura 2.34, cu amortizare viscoasă liniară cuplată direct, este

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t), \quad (2.68)$$

unde m este masa, k — constanta elastică, c — coeficientul de amortizare viscoasă echivalentă.

Se consideră excitație armonică $f(t) = \hat{f} e^{i\omega t}$, răspunsul staționar fiind exprimat ca deplasare, viteză sau accelerație, conform relațiilor (2.27).

Tabela 2.2.

Funcția de răspuns în frecvență (transmitanța)	Relația de definiție	Funcția complexă	Modulul funcției	Unghiul de fază
Receptanța	$\bar{\alpha} = \frac{x}{f}$	$\frac{\bar{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \Omega^2 + 12\zeta\Omega}$	$\frac{\hat{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$	$\varphi_d = \text{arctg} \frac{-2\zeta\Omega}{1 - \Omega^2}$
Mobilitatea	$\bar{M} = \frac{\dot{x}}{f}$	$\frac{\bar{\dot{x}}}{\hat{f}} = \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{1}{2\zeta + i(\Omega - 1/\Omega)}$	$\frac{\hat{\dot{x}}}{\hat{f}} = \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{\Omega}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$	$\varphi_v = \text{arctg} \frac{1 - \Omega^2}{2\zeta\Omega}$
Inertanța	$\bar{\eta} = \frac{\ddot{x}}{f}$	$\frac{\bar{\ddot{x}}}{\hat{f}} = -\frac{1}{m} \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 + 12\zeta\Omega}$	$\frac{\hat{\ddot{x}}}{\hat{f}} = \frac{1}{m} \frac{\Omega^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$	$\varphi_a = \varphi_d + \pi$
Obstrucția	$\bar{\beta} = \frac{f}{x}$	$\frac{\bar{f}}{\hat{x}} = k(1 - \Omega^2 + 12\zeta\Omega)$	$\frac{\hat{f}}{\hat{x}} = k \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}$	$\psi_d = \text{arctg} \frac{2\zeta\Omega}{1 - \Omega^2}$
Impedanța mecanică	$\bar{Z} = \frac{f}{\dot{x}}$	$\frac{\bar{f}}{\hat{\dot{x}}} = \frac{\sqrt{km}}{\Omega} [2\zeta\Omega + i(\Omega^2 - 1)]$	$\frac{\hat{f}}{\hat{\dot{x}}} = \frac{\sqrt{km}}{\Omega} \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}$	$\psi_v = \text{arctg} \frac{\Omega^2 - 1}{2\zeta\Omega}$
Masa aparentă	$\bar{\mu} = \frac{f}{\ddot{x}}$	$\frac{\bar{f}}{\hat{\ddot{x}}} = -\frac{m}{\Omega^2} (1 - \Omega^2 + 12\zeta\Omega)$	$\frac{\hat{f}}{\hat{\ddot{x}}} = \frac{m}{\Omega^2} \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}$	$\psi_a = \psi_d + \pi$
Transmisibilitatea forței	$\bar{c} = \frac{f_T}{f}$	$\frac{\bar{f}_T}{\hat{f}} = \frac{1 + 12\zeta\Omega}{1 - \Omega^2 + 12\zeta\Omega}$	$\frac{\hat{f}_T}{\hat{f}} = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2\Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$	$\varphi_T = \text{arctg} \frac{-2\zeta\Omega^3}{1 - \Omega^2 + 4\zeta^2\Omega^2}$

Funcțiile complexe de răspuns în frecvență sînt date în tabela 2.2 în funcție de pulsația adimensională

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$$

și de raportul de amortizare e

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n}. \quad (2.69)$$

2.2.2.2. Identificarea pe baza diagramei receptanței

Metoda amplitudinii maxime

Curba de rezonanță din figura 2.35 indică variația modului receptanței complexe (v. tabela 2.2) cu pulsația. Rezonanța amplitudinii apare la pulsația $\omega_{r_d} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, punctul *R* avînd ordonata $\alpha_{\max} = \frac{1}{k} \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$. Rezonanța de fază ($\varphi_d = -90^\circ$) apare la pulsația ω_n , punctul *M* avînd ordonata $\alpha_M = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2\zeta}$. În majoritatea aplicațiilor practice, însă, nu se poate face distincție între cele două puncte, datorită nivelului redus al amortizării și se consideră $\alpha_{\max} = \alpha_M$. Pentru $\zeta < 0,4$ eroarea este sub 10% [104].

Dacă se intersectează curba receptanței cu dreapta $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_{\max}$ se determină pulsațiile punctelor de semiputare *B'* și *C'*

$$\omega_{1,2}'^2 = \omega_n^2 (1 - 2\zeta^2 \mp 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}). \quad (2.70)$$

În cazul amortizării reduse se poate scrie

$$\omega_{1,2}'^2 \cong \omega_n^2 (1 \mp 2\zeta)$$

de unde rezultă

$$2\zeta \cong \frac{\omega_2'^2 - \omega_1'^2}{\omega_2'^2 + \omega_1'^2} = \frac{\omega_2'^2 - \omega_1'^2}{2\omega_n^2} = \frac{\omega_2' - \omega_1'}{\omega_n} \frac{\omega_2' + \omega_1'}{2\omega_n}$$

Deoarece

$$\frac{\omega_2' + \omega_1'}{2\omega_n} \cong 1,$$

de obicei se folosește relația aproximativă

$$\zeta \cong \frac{\omega_2' - \omega_1'}{2\omega_n}. \quad (2.71)$$

Se pot stabili și relații exacte pentru calculul amortizării. La pulsația $\omega = 0$ receptanța are valoarea statică $\alpha_s = \frac{1}{k}$. Orizontala $\alpha = \frac{1}{k}$ intersectează curba în punctul S , de pulsație $\omega_s = \sqrt{2} \omega_{ra}$ (fig. 2.36).

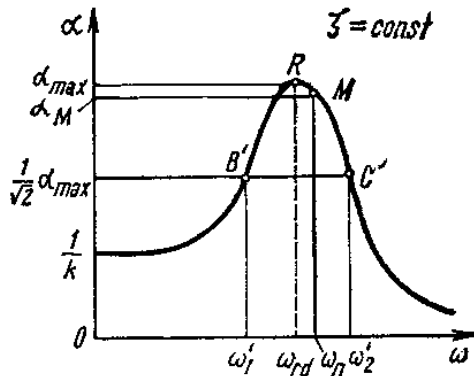


Fig. 2.35

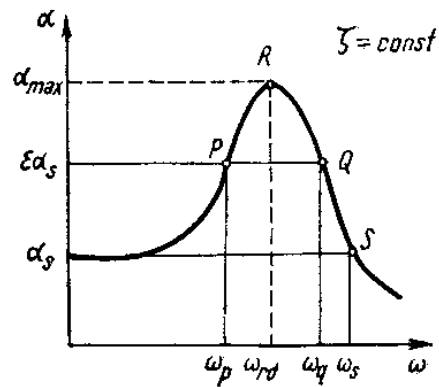


Fig. 2.36

O dreaptă $\alpha = \varepsilon \alpha_s$ intersectează curba în punctele P și Q , de pulsație ω_p , respectiv ω_q . Raportul de amortizare ζ se determină cu relația [72]

$$\zeta^2 = \frac{1}{2} - \frac{\omega_p^2 + \omega_q^2}{4\omega_p \omega_q} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}, \quad (2.72)$$

alegînd media valorilor calculate pentru diferite valori ε .

Metoda dă rezultate bune cînd curba de rezonanță este trasată în coordonate logaritmice. În acest caz, valorile parametrilor k și m se determină direct, cu ajutorul asimptotelor la curbă [106], folosind hîrtie cu carcoaj special.

O variantă a relației (2.72) este următoarea [79] :

$$\zeta^2 = \frac{1}{2} - \frac{\omega_p^2 + \omega_q^2}{4\omega_n^2}, \quad (2.73)$$

dar determinarea pulsației ω_n nu se poate face decît aproximativ.

Constanta elastică se calculează cu relația aproximativă

$$k \cong \frac{1}{2\zeta} \frac{1}{\alpha_{max}}.$$

Metoda diagramei defazajului

În figura 2.37 se prezintă variația cu pulsația a defazajului între forță și deplasarea masei sistemului din figura 2.34. Rezonanța de fază $\varphi_a = -90^\circ$ corespunde punctului M , de pulsație ω_n . La intersecția curbei cu dreptele $\varphi_a = -45^\circ$, respectiv $\varphi_a = -135^\circ$, se determină punctele B și C , de pulsații $\omega_{1,2} = \omega_n (\sqrt{\zeta^2 + 1} \mp \zeta)$.

Raportul de amortizare ζ se calculează cu relația exactă

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} \quad (2.74)$$

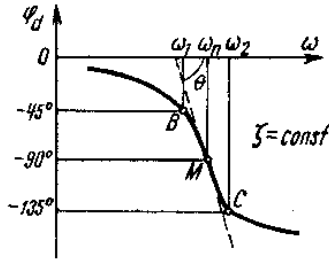


Fig. 2.37

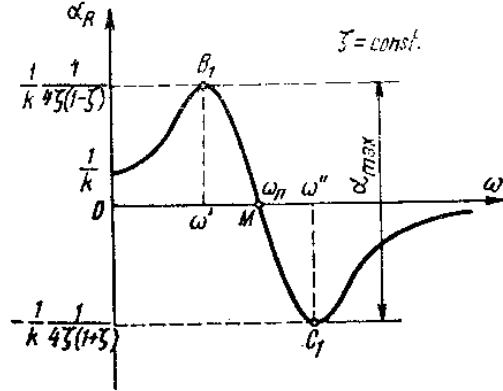


Fig. 2.38

Tangenta la curbă în punctul M face cu axa absciselor unghiul θ , astfel încît $\operatorname{tg} \theta = -\left(\frac{d\varphi_d}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_n}$. Raportul de amortizare

$$\zeta = \frac{1}{\omega_n \left(-\frac{d\varphi_d}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_n}}, \quad (2.75)$$

expresie similară cu (2.34).

Metoda diagramei componentei reale a receptanței

Diagrama din figura 2.38 se obține reprezentind grafic variația cu pulsația a componentei deplasării în fază cu forța, într-un baleiaj cu $\hat{f} = \text{const.}$

Curba intersectează axa absciselor în punctul M , de pulsație ω_n , corespunzător rezonanței de fază. Punctele B_1 și C_1 , în care α_R are valori extreme, au pulsațiile ω' , $\omega'' = \omega_n \sqrt{1 \mp 2\zeta}$.

Raportul de amortizare ζ se poate calcula deci cu relațiile exacte

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{\omega''^2 - \omega'^2}{\omega''^2 + \omega'^2} = \frac{\omega''^2 - \omega'^2}{4\omega_n^2}. \quad (2.76)$$

Determinînd panta tangentei la curbă în punctul M , constanta elastică se calculează cu relația

$$k = \frac{1}{2\zeta^2 \omega_n \left(-\frac{d\alpha_R}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_n}}. \quad (2.77)$$

Deoarece suma ordonatelor punctelor B_1 și C_1 este chiar α_{\max} se poate folosi relația

$$k = \frac{1}{2\zeta(1 - \zeta^2)^{1/2} \alpha_{\max}} \quad (2.78)$$

Metoda diagramei componentei imaginare a receptanței

Diagrama din figura 2.39 se obține reprezentînd grafic variația cu pulsația a componentei deplasării în cvadratură (defazată cu $\frac{\pi}{2}$) cu forța de excitație, într-o măsurare în care se menține $\hat{f} = \text{const}$.

Valoarea maximă a componentei α_I se obține la o pulsație mai mică decît ω_n , dar în calculele practice aceasta se poate neglija.

La pulsația ω_n rezultă $(\alpha_I)_{\omega=\omega_n} = -\frac{1}{2\zeta k}$. Folosind deci împreună diagramele din figurile 2.38 și 2.39, se poate calcula raportul de amortizare cu formula

$$\zeta = \frac{|\alpha_I|_{\omega=\omega_n}}{\omega_n \left(-\frac{d\alpha_R}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n}} \quad (2.79)$$

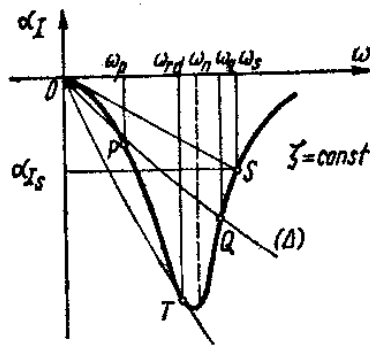


Fig. 2.39

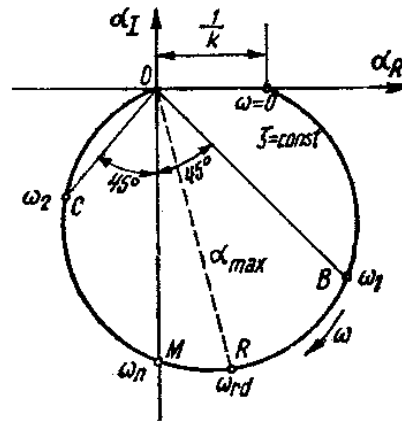


Fig. 2.40

Tangenta OT la curbă determină punctul T de abscisă ω_{rd} . Tangenta OS în origine intersectează curba în punctul S , de abscisă $\omega_s = \sqrt{2} \omega_{rd}$ și ordonată $\alpha_{Is} = -\frac{2\zeta}{k} \sqrt{2(1 - 2\zeta^2)} = -\frac{2\zeta}{k} \omega_s$. Dreapta (Δ) intersectează curba în punctele P și Q , de abscise ω_p , respectiv ω_q , cu care se calculează ζ din relația (2.73), în care ω_n se determină aproximativ ca abscisa punctului de extremum.

Metoda diagramei polare

Eliminând pulsația între expresiile componentei reale $\alpha_R = \alpha \cos \varphi_d$ și a celei imaginare $\alpha_I = \alpha \sin \varphi_d$ ale receptanței complexe, se obține o curbă de ecuație (fig. 2.40)

$$(\alpha_R^2 + \alpha_I^2)^2 - \frac{\alpha_R}{k} (\alpha_R^2 + \alpha_I^2) - \frac{1}{4\zeta^2 k^2} \alpha_I^2 = 0, \quad (2.80)$$

care arată că, în cazul amortizării viscoase, diagrama polară a receptanței nu este un cerc (la sisteme slab amortizate aceasta poate fi totuși aproximată cu un cerc).

Curba intersectează axa imaginară în punctul M , de pulsație ω_n . Coardele OB și OC , care fac unghiuri de 45° cu semiaxa imaginară negativă determină pe curbă pulsațiile $\omega_{1,2} = \omega_n (\sqrt{\zeta^2 + 1} \mp \zeta)$, cu ajutorul cărora raportul de amortizare se calculează folosind formula exactă (2.74). Constanta elastică rezultă din relația

$$k = \frac{1}{2\zeta \overline{OM}} \quad (2.81)$$

unde $\overline{OM} = |\alpha_I|_{\omega=\omega_n}$, iar masa $m = \frac{k}{\omega_n^2}$.

2.2.2.3. Identificarea pe baza diagramei mobilității

Metoda diagramei amplitudine-frecvență

Curba din figura 2.41 reprezintă variația cu pulsația a modulului mobilității complexe. (v. tabela 2.2). Rezonanța amplitudinii vitezei apare

la pulsația $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, căreia îi corespunde ordonata $M_{\max} = \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{c}$.

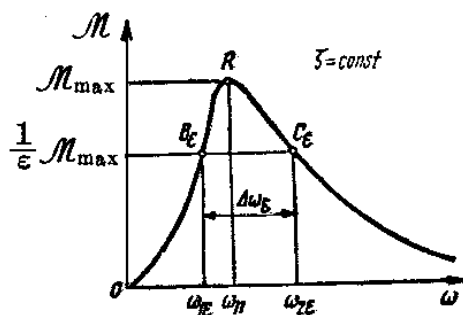


Fig. 2.41

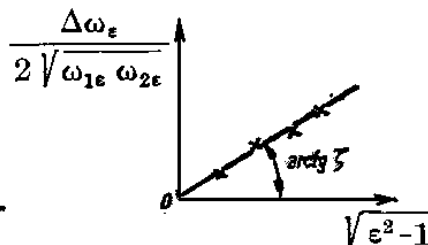


Fig. 2.42

Intersectînd curba cu dreapta $M = \frac{1}{\varepsilon} M_{\max}$, se obțin punctele B_ε și C_ε , de pulsații

$$\omega_{1\varepsilon, 2\varepsilon} = \omega_n (\sqrt{\zeta^2(\varepsilon^2 - 1) + 1} \mp \zeta \sqrt{\varepsilon^2 - 1}).$$

Raportul de amortizare se calculează cu relația exactă

$$\zeta = \frac{\omega_{2\varepsilon} - \omega_{1\varepsilon}}{2\omega_n \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}. \quad (2.82)$$

Deoarece $\omega_{1\varepsilon} \omega_{2\varepsilon} = \omega_n^2$, notînd $\Delta\omega_\varepsilon = \omega_{2\varepsilon} - \omega_{1\varepsilon}$, relația (2.82) se mai scrie

$$\zeta = \frac{\Delta\omega_\varepsilon}{2\sqrt{\omega_{1\varepsilon}\omega_{2\varepsilon}}(\varepsilon^2 - 1)}. \quad (2.82, a)$$

Repetînd construcția pentru mai multe valori ε , se reprezintă grafic (fig. 2.42) variația raportului $\frac{\Delta\omega_\varepsilon}{2\sqrt{\omega_{1\varepsilon}\omega_{2\varepsilon}}}$ în funcție de $\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ și prin punctele astfel obținute se trasează o linie dreaptă. Raportul de amortizare ζ este egal cu panta acestei drepte.

Dacă $\varepsilon = \sqrt{2}$, dreapta $\mathcal{M} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{M}_{\max}$ intersectează curba în punctele B și C , de pulsații

$$\omega_{1,2} = \omega_n (\sqrt{\zeta^2 + 1} \mp \zeta), \quad (2.83)$$

iar raportul de amortizare se calculează cu relația exactă [134]

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} = \frac{\Delta\omega}{2\omega_n}. \quad (2.84)$$

Deoarece $\omega_1 \omega_2 = \omega_n^2$, se mai poate scrie

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\sqrt{\omega_1 \omega_2}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} - \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \right). \quad (2.84, a)$$

Masa m se calculează apoi cu relația

$$m = \frac{1}{2\zeta \omega_n \mathcal{M}_{\max}} = \frac{c}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (2.85)$$

Metoda conduce la erori în cazul unor curbe de rezonanță prea aplatizate (amortizare mare) sau prea alungite (amortizare mică), fiind necesară alegerea corespunzătoare a scărilor diagramei.

Curba din figura 2.41 devine simetrică dacă reprezentarea se face în coordonate logaritmice (fig. 2.43, a). Se folosesc diagrame cu caroiaj special [33], pe care sînt trasate linii cu panta 6 dB/octavă, reprezentînd mobilitatea unor elemente pur elastice și linii cu panta de -6dB/octavă, reprezentînd mobilitatea unor mase pure.

Cu ajutorul acestor diagrame, masa m se determină direct din comportarea asimptotică la frecvențe înalte, iar constanta elastică k — din comportarea asimptotică la frecvențe joase.

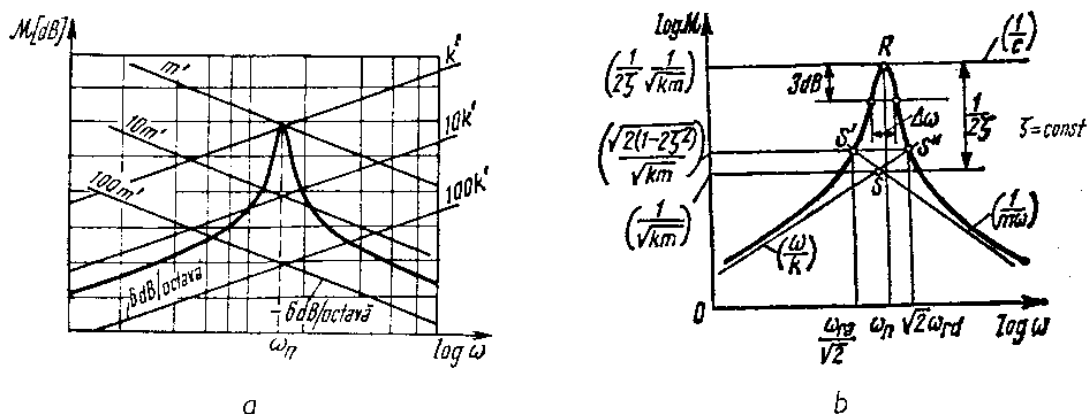


Fig. 2.43

Raportul de amortizare ζ se calculează cu formula (2.84) în care $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ este lățimea benzii de pulsații la 3dB sub valoarea maximă. Aceeași valoare se obține determinând „factorul de calitate” $Q = \frac{1}{2\zeta}$, dat de distanța verticală între punctul S de intersecție al asimptotelor la curbă și punctul de răspuns maxim R (fig. 2.43, b).

Metoda diagramei defazajului

Pe diagrama din figura 2.44 se determină punctele B , M și C , de pulsații ω_1 , ω_n , respectiv ω_2 , cu care amortizarea se calculează folosind relația (2.84).

Se mai poate stabili expresia

$$\zeta = \frac{1}{\omega_n \left(-\frac{d\varphi_v}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n}} \quad (2.87)$$

care se folosește cînd se dispune doar de o mică porțiune a diagramei defazajului, situată în vecinătatea punctului M , care definește rezonanța de fază.

Se apreciază că valorile raportului de amortizare ζ calculate cu relația (2.87) sînt mai precise ca cele calculate prin metoda amplitudinii maxime [86].

Metoda diagramei componentei reale a mobilității

Curba din figura 2.45 reprezintă variația cu pulsația a componentei $M_R = M \cos \varphi_v$ a mobilității. Valoarea maximă $M_{R_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{1}{2\zeta}$ apare la pulsația de rezonanță ω_n . Dreapta $M_R = \frac{1}{e} M_{R_{\max}}$ intersectează curba

în punctele B_e și C_e , de pulsații ω_{1e} și ω_{2e} , cu care raportul de amortizare se calculează folosind formula exactă

$$\zeta = \frac{\omega_{2e} - \omega_{1e}}{2\omega_n \sqrt{e - 1}} \quad (2.88)$$

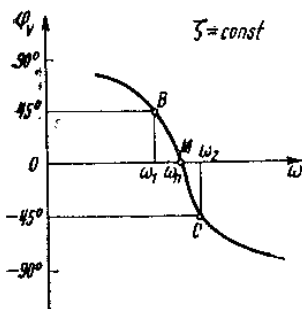


Fig. 2.44

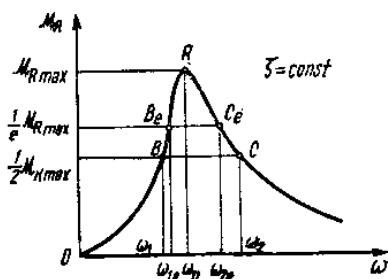


Fig. 2.45

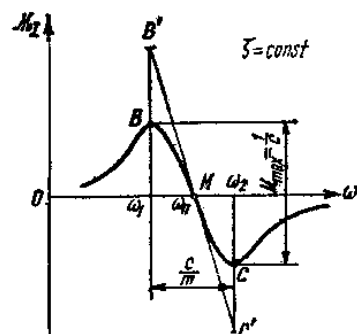


Fig. 2.46

Dacă $e = 2$, dreapta $M_R = \frac{1}{2} M_{R_{\max}}$ intersectează curba în punctele B și C , de pulsații ω_1 și ω_2 , cu care raportul de amortizare ζ se calculează folosind relația (2.84).

Metoda diagramei componentei imaginare a mobilității

Curba din figura 2.46 reprezintă variația componentei $M_I = M \sin \varphi_v$ cu pulsația. Intersecția cu axa reală se face în punctul M , de abscisă ω_n , care este și un punct de inflexiune al curbei. Valorile extreme $M_{I_{\max}} = \pm \frac{1}{4\zeta \sqrt{km}}$ apar în punctele B și C , de abscise $\omega_{1,2} = \omega_n (\sqrt{\zeta^2 + 1} \mp \zeta)$. Raportul de amortizare se calculează cu relația (2.84).

Distanța între tangentele în B și C este $M_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{km}} = \frac{1}{c}$, astfel că masa se poate calcula cu relația (2.85).

Panta tangentei la curbă în punctul M este $\left(-\frac{dM_I}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta^2 k}$.

Rezultă

$$\zeta = \frac{2(M_I)_{\omega=\omega_1}}{\omega_n \left(-\frac{dM_I}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_n}} \quad (2.89)$$

Dreapta care unește punctele B și C are o pantă $\left(-\frac{1}{4\zeta^2 k}\right)$. Dacă se dublează ordonatele punctelor de extremum, linia care unește punctele B' și C' este tangentă la curbă în M [127].

Metoda diagramei polare

Diagrama polară a mobilității complexe (fig. 2.47) este un cerc de ecuație

$$\left(\mathcal{M}_R - \frac{1}{4\zeta\sqrt{km}} \right)^2 + \mathcal{M}_I^2 = \left(\frac{1}{4\zeta\sqrt{km}} \right)^2. \quad (2.90)$$

La intersecția cu axa reală se definește pulsația ω_n . Diametrul $\overline{OM} = \mathcal{M}_{\max} = \frac{1}{c}$. Diametrul BC , perpendicular pe OM , intersectează cercul în punctele de pulsații ω_1 și ω_2 , cu care ζ se calculează din relația (2.84).

Dacă se notează prin ds arcul de cerc corespunzător unei creșteri $d\varphi_v$ a unghiului de fază, atunci $ds = \frac{1}{c} d\varphi_v$. Derivata

$$\frac{ds}{d\Omega} = -\frac{1}{c} \frac{d\varphi_v}{d\Omega} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\Omega} \left(\arctg \frac{\Omega^2 - 1}{2\zeta\Omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{\Omega^2 + 1}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2} \quad (2.91)$$

are o valoare maximă

$$\left(\frac{ds}{d\Omega} \right)_{\max} = \frac{1}{4\sqrt{km}} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2} - (1 - \zeta^2)} \quad (2.92)$$

la pulsația adimensională

$$\Omega^\circ = \sqrt{-1 + 2\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.93)$$

inferioară pulsației de rezonanță $\Omega = 1$.

Pentru valori uzuale ale raportului de amortizare ζ se poate aproxima $\Omega^\circ \cong 1$ și

$$\left(\frac{ds}{d\Omega} \right)_{\max} \cong \frac{1}{2\zeta^2} \frac{1}{\sqrt{km}} = \frac{1}{\zeta c},$$

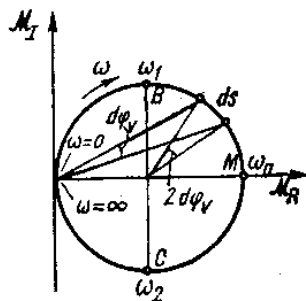


Fig. 2.47

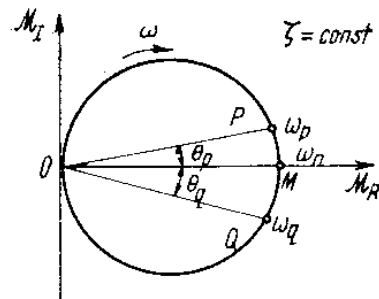


Fig. 2.48

astfel că se poate aplica metoda Kennedy — Pancu pentru localizarea rezonanței [131].

Dacă se dispune doar de o mică parte a diagramei polare, situată în zona rezonanței, nu se poate aplica relația (2.84). Punctul M , definit de ω_n , se alege în zona unde $\frac{ds}{d\omega}$ este maxim, după care se trasează cercul care aproximează cel mai bine punctele din vecinătatea lui M [129]. Se duce diametrul OM . Se unește punctul O , cu două puncte P și Q , de pulsații cunoscute ω_p și ω_q , foarte apropiate de M , și se măsoară unghiurile θ_p și θ_q (fig. 2.48). Deoarece, conform relației (2.87),

$$\left(\frac{d\varphi_p}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_n} \cong \frac{\theta_q - \theta_p}{\omega_q - \omega_p} = -\frac{1}{\zeta\omega_n},$$

rezultă [74]

$$\zeta = \frac{\omega_q - \omega_p}{\omega_n} \frac{1}{\theta_p + |\theta_q|}. \quad (2.94)$$

Dacă $\theta_q = \theta_p = \theta$,

$$\zeta = \frac{\omega_q - \omega_p}{2\omega_n} \cotg \theta. \quad (2.95)$$

2.2.2.4. Identificarea pe baza diagramei inertanței

Metoda amplitudinii maxime

În figura 2.49 se prezintă variația modului inertanței complexe (v. tabela 2.2) cu pulsația. Rezonanța amplitudinii apare la pulsația $\omega_{ra} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$, punctul R avind ordonata $\eta_{max} = \frac{1}{m} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$. La pulsația $\omega_s = \frac{\omega_{ra}}{\sqrt{2}}$ se găsește punctul S în care asimptota $\eta = \frac{1}{m}$ intersectează curba. Dreapta $\eta = \frac{\varepsilon}{m}$ determină punctele P și Q , de pulsații ω_p și ω_q , cu

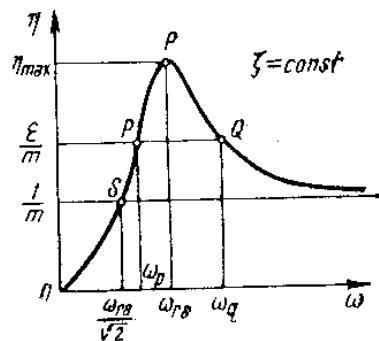


Fig. 2.49

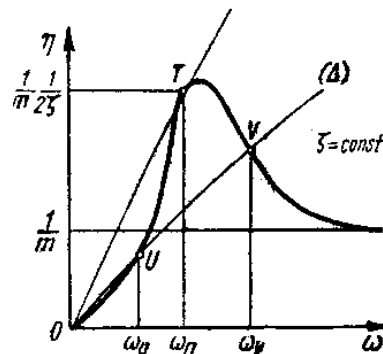


Fig. 2.50

ajutorul cărora se calculează raportul de amortizare folosind relația (2.72)

$$\zeta^2 = \frac{1}{2} - \frac{\omega_p^2 + \omega_q^2}{4\omega_p \omega_q} \sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon^2}}$$

Tangenta OT determină punctul T , de pulsație ω_n (fig. 2.50). Dreapta (Δ) intersectează curba în punctele U și V , astfel încît $\omega_n = \sqrt{\omega_u \omega_v}$. Se poate folosi deci și relația [72]

$$\zeta^2 = \frac{1}{2} - \frac{(\omega_p^2 + \omega_q^2) \omega_n^2}{4\omega_p^2 \omega_q^2} \quad (2.96)$$

Masa m se calculează din ordonata punctului S (fig. 2.49) iar $k = m\omega_n^2$.

Și în acest caz se obțin rezultate bune cînd curba de rezonanță este trasată în coordonate logaritmice.

Metoda diagramei polare

Eliminînd pulsația ω între expresiile componentei reale $\eta_R = \eta \cos \varphi_a$ și a celei imaginare $\eta_I = \eta \sin \varphi_a$ ale inertanței complexe, se obține o curbă de ecuație (fig. 2.51)

$$(\eta_R^2 + \eta_I^2)^2 - \frac{\eta_R}{m} (\eta_R^2 + \eta_I^2) - \frac{1}{4\zeta^2 m^2} \eta_I^2 = 0 \quad (2.97)$$

care arată că, în cazul amortizării viscoase, diagrama polară a inertanței nu este un cerc.

Curba intersectează axa imaginară în punctul M , de pulsație ω_n (rezonanța de fază). Coardele OB și OC , care fac unghiuri de 45° cu semi-axa imaginară pozitivă, determină pe curbă pulsațiile $\omega_{1,2} = \omega_n(\sqrt{\zeta^2 + 1} \mp \zeta)$ cu care se calculează raportul de amortizare folosind formula exactă (2.74).

Masa m rezultă apoi din relația

$$m = \frac{1}{2\zeta \overline{OM}}$$

unde $\overline{OM} = (\eta_I)_{\omega = \omega_n}$.

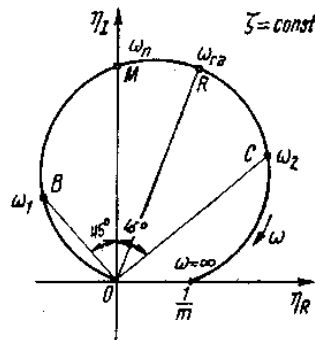


Fig. 2.51

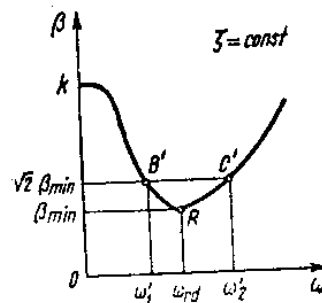


Fig. 2.52

2.2.2.5. Identificarea pe baza diagramei obstructanței

Metoda amplitudinii minime

Curba din figura 2.52 reprezintă variația cu pulsația a modului obstructanței complexe (v. tabela 2.2). La rezonanță $\omega_{rd} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ iar $\beta_{\min} = k \cdot 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Intersectând curba cu dreapta $\beta = \sqrt{2} \beta_{\min}$ se obțin punctele de semiputere B' și C' , de pulsații ω_1' și ω_2' , date de relația (2.70). În cazul amortizării reduse, raportul de amortizare se calculează cu formula aproximativă (2.71).

Metoda diagramei polare

Diagrama polară a obstructanței complexe este o parabolă (fig. 2.53) de ecuație

$$\frac{1}{k^2} \beta_I^2 = 4\zeta^2 \left(1 - \frac{1}{k} \beta_R \right), \quad (2.98)$$

denumită *parabola lui Runge* [108].

Aceasta intersectează axa imaginară în punctul M , de pulsație ω_n . Linile OC și OB , care fac unghiuri de 45° cu semi-axa imaginară pozitivă, determină și în acest caz pulsațiile ω_1 și ω_2 , date de relația (2.83), cu care raportul de amortizare se calculează cu formula exactă

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n}$$

Masa se calculează cu relația $m = \frac{1}{2\zeta (\beta_I)_{\omega=\omega_n}}$, iar $k = m\omega_n^2$.

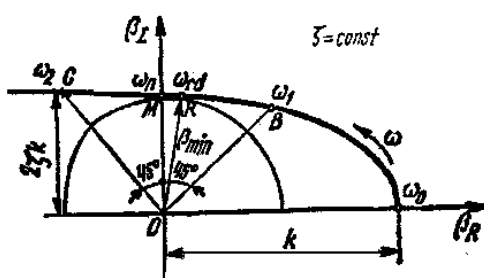


Fig. 2.53

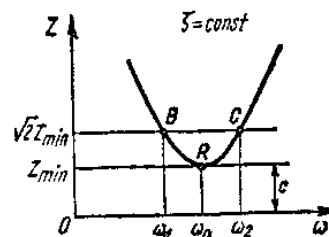


Fig. 2.54

2.2.2.6. Identificarea pe baza diagramei impedanței mecanice

Metoda amplitudinii minime

În figura 2.54 se prezintă o curbă amplitudine-pulsație pentru impedanța mecanică a sistemului din figura 2.34. La pulsația de rezonanță ω_n , $Z_{\min} = 2\zeta \sqrt{km} = c$. Intersectând curba cu dreapta $Z = \sqrt{2}Z_{\min}$, se determină pulsațiile ω_1 și ω_2 , cu care ζ se calculează cu formula exactă

(2.84). Apoi masa m rezultă din relația

$$m = \frac{c}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{Z_{\min}}{2\zeta\omega_n}. \quad (2.99)$$

Dacă se trasează curba impedanței mecanice în coordonate logaritmice (fig. 2.55), constantele m și k se determină direct din comportarea asimptotică în afara rezonanței, iar raportul de amortizare ζ — din „factorul de calitate” $Q = \frac{1}{2\zeta}$ măsurat ca distanța verticală între punctul de intersecție S al asimptotelor la curbă și punctul de impedanță minimă R .

Prin intersectarea curbei cu orizontala situată la 3dB deasupra valorii Z_{\min} , se obțin punctele de pulsații ω_1 și ω_2 , cu care ζ se calculează din relația (2.84).

Metoda diagramei polare

Deoarece $Z_R = 2\zeta\sqrt{km}$ independent de pulsație, diagrama polară a impedanței mecanice este o dreaptă paralelă cu axa imaginară (fig. 2.56). Ea taie axa reală în punctul M , de pulsație ω_n . Dreptele OB și OC , care fac unghiuri de 45° cu semiaxa reală pozitivă, determină pulsațiile ω_1 și ω_2 . Se folosesc apoi relațiile (2.84) și (2.99).

2.2.2.7. Identificarea pe baza diagramei masei aparente

Metoda diagramei amplitudine-pulsație

În figura 2.57 se prezintă graficul variației cu pulsația a modulului funcției complexe a masei aparente (v. tabela 2.2). De obicei diagrama se

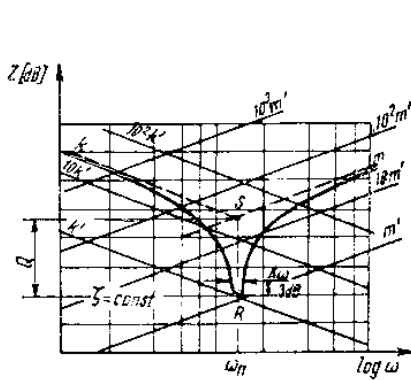


Fig. 2.55

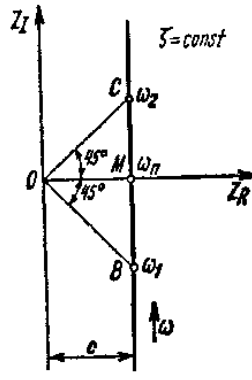


Fig. 2.56

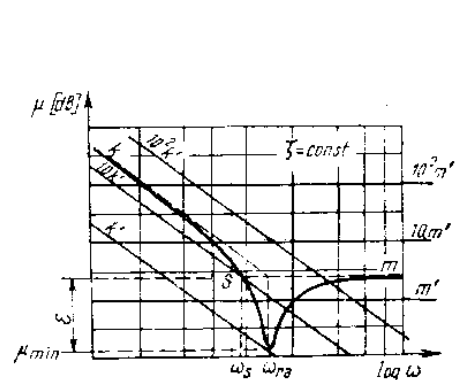


Fig. 2.57

trasează menținând constantă amplitudinea accelerației și măsurând variația cu pulsația a amplitudinii forței de excitație.

Valoarea minimă $\mu_{\min} = m \frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{1-2\zeta^2}$ se obține la pulsația $\omega_{ra} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$. Asimptota orizontală $\mu = m$ intersectează curba în

punctul S , de pulsație $\omega_s = \frac{\omega_{ra}}{\sqrt{2}}$. Raportul $\varepsilon = \frac{m}{\mu_{\min}}$ se măsoară ca distanța între tangenta la curbă în R și asimptota orizontală. Raportul de amortizare se calculează cu formula exactă

$$\zeta = \frac{\sqrt{\varepsilon + 1} - \sqrt{\varepsilon - 1}}{2\sqrt{\varepsilon}}. \quad (2.100)$$

Masa și constanta elastică se determină din comportarea asimptotică în afara rezonanței.

Metoda diagramei polare

Diagrama polară a masei aparente este o parabolă (fig. 2.58) de ecuație

$$\frac{\mu_I^2}{4\zeta^2 m^2} = 1 - \frac{\mu_R}{m}. \quad (2.101)$$

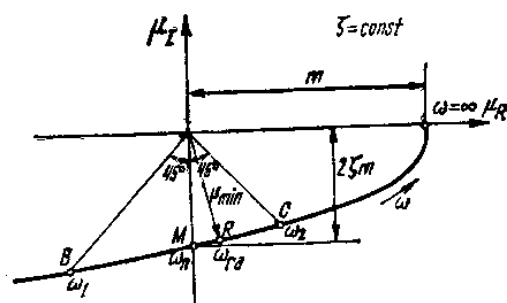


Fig. 2.58

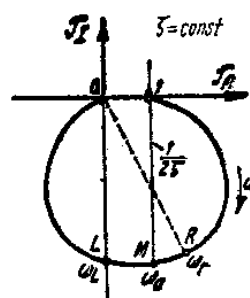


Fig. 2.59

Aceasta intersectează axa imaginară în punctul M , de pulsație ω_n , corespunzător rezonanței de fază. Dreptele OB și OC , care fac unghiuri de 45° cu semiaxa imaginară negativă, determină pe curbă pulsațiile ω_1 și ω_2 cu care ζ se calculează din formula (2.84), apoi masa

$$m = -\frac{1}{2\zeta} (\mu_I)_{\omega=\omega_n}. \quad (2.102)$$

2.2.2.8. Identificarea pe baza diagramei transmisibilității forței

În figura 2.59 se prezintă diagrama polară a transmisibilității forței.

Valoarea maximă $\mathcal{T}_{\max} = \frac{4\zeta^2}{\sqrt{16\zeta^4 - 8\zeta^2 - 2 + 2\sqrt{1 + 8\zeta^2}}}$ se obține

la pulsația $\omega_r = \frac{\omega_n}{2\zeta} \sqrt{\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1}$. Pulsația ω_n se determină intersectînd diagrama cu dreapta $\mathcal{T}_R = 1$. Raportul de amortizare

$$\zeta = -\frac{1}{2(\mathcal{T}_I)_{\omega=\omega_n}}. \quad (2.103)$$

Curba taie axa imaginară la punctul L , de pulsație $\omega_1 = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 4\zeta^2}}$.
Rezultă o altă relație pentru factorul de amortizare

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^2}. \quad (2.104)$$

2.3. Metode de excitație cu forțe armonice în cvadratură

Inițial, *metoda forțelor în cvadratură* a fost propusă de către G. de Vries [131] ca o variantă a *metodei frecvențelor deplasate* (v. paragraful 2.6.1.). Ulterior, metoda a fost dezvoltată de autor, în special pentru identificarea sistemelor cu amortizare histeretică [90, 93]. Deși necesită un echipament specializat, folosirea ei are avantajul de a duce la rezultate mai precise decât metoda Kennedy-Pancu, în special în cazul sistemelor foarte slab amortizate.

Metoda se bazează pe modificarea diagramei răspunsului în frecvență atunci când la forța inițială de excitație $\hat{f} \cos \omega t$ se adaugă o componentă $\hat{f}' \sin \omega t$, defazată deci cu 90° față de prima (componenta în cvadratură). În notație complexă, aceasta revine la a considera în locul forței $f(t) = \hat{f} e^{i\omega t}$, o forță

$$f(t) = (\hat{f} + i\hat{f}')e^{i\omega t} \quad (2.105)$$

sau, dacă $\hat{f}' = \lambda \hat{f}$,

$$f(t) = \hat{f}(1 + i\lambda)e^{i\omega t}. \quad (2.106)$$

Analitic, rezultă că expresiile funcțiilor complexe de răspuns în frecvență care au forța la numitor (receptanța, mobilitatea, inertanța) se înmulțesc cu cantitatea complexă $(1 + i\lambda)$, ceea ce echivalează cu o amplificare cu $\sqrt{1 + \lambda^2}$ și o rotire în sens trigonometric (pentru $\lambda > 0$) cu unghiul $\arctg \lambda$.

2.3.1. Identificarea parametrilor sistemului cu amortizare histeretică

2.3.1.1. Identificarea pe baza diagramei receptanței

Metoda celor două cercuri

Dacă asupra sistemului din figura 2.7 acționează o forță excitatoare de forma (2.106), ecuația mișcării este

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega} \dot{x} + kx = \hat{f}(1 + i\lambda)e^{i\omega t}. \quad (2.107)$$

Dacă deplasarea se alege de forma

$$x = \tilde{x}e^{i\omega t}, \quad (2.108)$$

rezultă receptanța complexă

$$\bar{\alpha} = \frac{\tilde{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{k} \frac{1 + i\lambda}{1 - \Omega^2 + ig}, \quad (2.109)$$

unde

$$g = \frac{h}{k}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.110)$$

Expresia (2.109) se mai scrie sub forma

$$\bar{\alpha} = \alpha_R + i\alpha_I = \frac{1 - \Omega^2 + \lambda g}{k[(1 - \Omega^2)^2 + g^2]} + i \frac{\lambda(1 - \Omega^2) - g}{k[(1 - \Omega^2)^2 + g^2]}. \quad (2.111)$$

Eliminînd Ω între expresiile lui α_R și α_I , rezultă ecuația locului geometric al vîrfului vectorului $\bar{\alpha}$ în planul complex

$$\left(\alpha_R - \frac{\lambda}{2h}\right)^2 + \left(\alpha_I + \frac{1}{2h}\right)^2 = \frac{1 + \lambda^2}{4h^2}, \quad (2.112)$$

reprezentat în figura 2.60 prin cercul trasat cu linie continuă ($\lambda \neq 0$). Pe aceeași figură s-a trasat cu linie întreruptă cercul de ecuație (2.37), corespunzător valorii $\lambda = 0$ în (2.112). Cele două cercuri se intersectează pe axa imaginară în punctul M , căruia pe cercul $\lambda = 0$ îi corespunde pulsația ω_n , iar pe cercul $\lambda \neq 0$ — pulsația $\omega' = \omega_n \sqrt{1 + \lambda g}$. Aceasta se verifică observînd că diametrul OM' face un unghi $\arctg \lambda$ cu OM . Factorul de

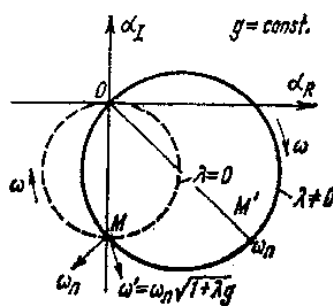


Fig. 2.60

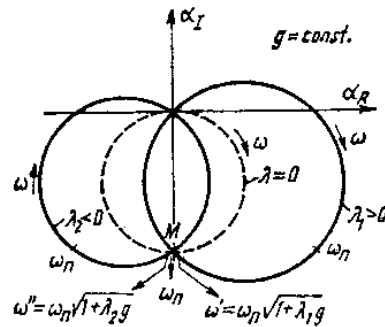


Fig. 2.61

amortizare se calculează cu formula

$$g = \frac{1}{\lambda} \left[\left(\frac{\omega'}{\omega_n} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.113)$$

iar constanta elastică — din relația (2.32), în care $\alpha_{\text{rez}} = \overline{OM}$.

Metoda celor trei cercuri

Dacă pe aceeași diagramă se trasează două cercuri de parametri λ_1 , respectiv λ_2 , împreună cu cercul $\lambda = 0$ (fig. 2.61), cele trei cercuri se intersectează în punctul M , corespunzător rezonanței sistemului. Factorul de amortizare g se calculează cu relațiile

$$g = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega'^2 - \omega''^2}{\omega_n^2} = \frac{\omega'^2 - \omega''^2}{\lambda_1 \omega''^2 - \lambda_2 \omega'^2} \quad (2.114)$$

unde ω_n , ω' și ω'' sînt pulsațiile punctului M pe cercurile $\lambda = 0$, λ_1 , respectiv λ_2 .

Dacă $\lambda_1 = +1$ și $\lambda_2 = -1$, atunci $\omega' = \omega_2 = \omega_n \sqrt{1 + g}$, $\omega'' = \omega_1 = \omega_n \sqrt{1 - g}$, iar relațiile (2.114) se transformă în (2.30).

Măsurarea se poate face menținînd constantă amplitudinea deplasării, ceea ce este util la analiza sistemelor slab neliniare. Localizarea rezonanței pe cercul $\lambda = 0$ este independentă de sistemul de axe, ceea ce devine util la sisteme cu mai multe grade de libertate și frecvențe proprii relativ apropiate.

Metoda liniilor de pulsație constantă

Dacă se elimină λ între expresiile lui α_R și α_I din relația (2.111) se obține ecuația unei familii de drepte de pulsație constantă (fig. 2.62) care trec prin punctul $M \left(0, -\frac{1}{h} \right)$

$$\alpha_I = \frac{1 - \Omega^2}{g} \alpha_R - \frac{1}{h} \quad (2.115)$$

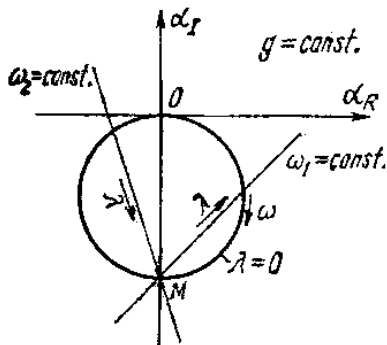


Fig. 2.62

Rezultă că localizarea rezonanței pe cercul $\lambda = 0$ se poate face prin intersectarea acestuia preferabil cu două drepte (2.115), de pulsații $\omega_1 = \text{const.}$, respectiv $\omega_2 = \text{const.}$

Determinînd valoarea lui λ corespunzătoare punctului de intersecție al liniei $\omega_1 = \text{const.}$ cu cercul, factorul de amortizare se calculează cu relația

$$g = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_n^2} - 1 \right) \quad (2.116)$$

Apoi se determină

$$k = \frac{1}{g \alpha_{\max}} \quad \text{și} \quad m = \frac{k}{\omega_n^2}$$

2.3.1.2. Identificarea pe baza diagramei obstructanței

Metoda liniilor $\lambda = \text{const.}$

Dacă se efectuează măsurări în care se menține constantă amplitudinea deplasării armonice, variind amplitudinea forței de excitație, interesează funcția

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\bar{\alpha}} = k \frac{1 - \Omega^2 + ig}{1 + i\lambda} \quad (2.117)$$

sau

$$\bar{\beta} = \beta_R + i\beta_I = k \frac{1 - \Omega^2 + g\lambda}{1 + \lambda^2} + ik \frac{g - \lambda(1 - \Omega^2)}{1 + \lambda^2}. \quad (2.118)$$

Prin eliminarea lui Ω între expresiile componentelor β_R și β_I , rezultă că pentru $\lambda = \text{const.}$ extremitatea vectorului (2.117) parcurge drepte de ecuație (fig. 2.63)

$$\beta_I = -\lambda\beta_R + h. \quad (2.119)$$

Pentru $\lambda = 0$ rezultă diagrama din figura 2.28. Orice dreaptă $\lambda = \text{const.}$ intersectează dreapta $\lambda = 0$ în punctul M , de pulsație ω_n . Pe o dreaptă de parametru λ_1 , punctul M corespunde unei pulsații $\omega' = \omega_n \sqrt{1 + g\lambda_1}$, iar pe o dreaptă de parametru λ_2 — unei pulsații $\omega'' = \omega_n \sqrt{1 + g\lambda_2}$. Factorul de amortizare se calculează deci cu relațiile (2.114).

Metoda cercurilor de pulsație constantă

Datorită inversiunii (2.117), prin eliminarea lui λ între expresiile lui β_R și β_I din (2.118), se deduce că, menținând $\omega = \text{const.}$, extremitatea vectorului $\bar{\beta}$ descrie un cerc de ecuație

$$\left(\beta_R - k \frac{1 - \Omega^2}{2}\right)^2 + \left(\beta_I - \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2 + k^2(1 - \Omega^2)^2}{4}, \quad (2.120)$$

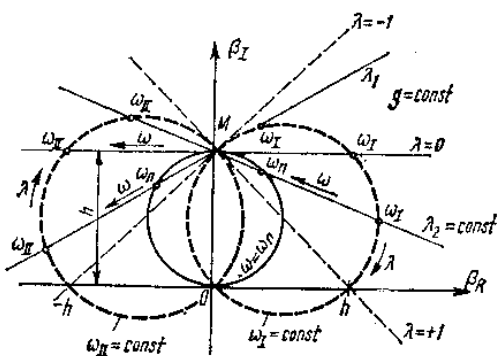


Fig. 2.63

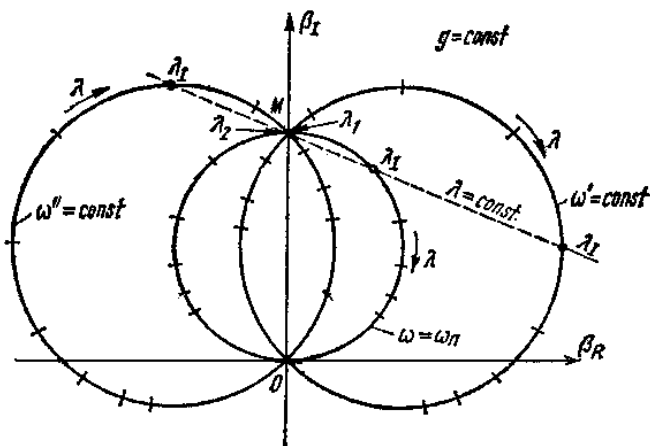


Fig. 2.64

Toate cercurile $\omega = \text{const.}$, intersectează cercul $\omega = \omega_n$ pe axa imaginară, în punctul M , corespunzător rezonanței (fig. 2.64). Pe două cercuri trasate la pulsații constante ω' , respectiv ω'' , punctul M corespunde unor valori $\lambda_1 = \frac{1}{g} \left(1 - \frac{\omega'^2}{\omega_n^2}\right)$, respectiv $\lambda_2 = \frac{1}{g} \left(1 - \frac{\omega''^2}{\omega_n^2}\right)$, care se determină experimental, astfel că g se poate calcula cu relațiile (2.114).

2.3.2. Identificarea parametrilor sistemelor cu amortizare viscoasă

În cele ce urmează se prezintă trei metode bazate pe analiza diagramelor polare ale mobilității complexe. Alte metode, bazate pe analiza diagramelor componentelor vitezei în fază și în evadratură cu forța, sau a diagramei defazajului între forță și viteză, sînt expuse în lucrarea [89].

Metoda celor două cercuri

Ecuția mișcării sistemului din figura 2.34, sub acțiunea unei forțe excitatoare de forma (2.106), este

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \hat{f}(1 + i\lambda)e^{i\omega t}. \quad (2.121)$$

Rezultă mobilitatea complexă

$$\bar{\mathcal{M}} = \frac{\tilde{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{1 + i\lambda}{2\zeta + i\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)}, \quad (2.122)$$

unde

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.123)$$

Expresia (2.122) se mai scrie sub forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_R + i\mathcal{M}_I &= \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{2\zeta + \lambda\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)}{4\zeta^2 + \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2} + \\ &+ i \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{2\zeta\lambda - \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)}{4\zeta^2 + \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Eliminînd Ω între expresiile lui \mathcal{M}_R și \mathcal{M}_I , rezultă ecuația locului geometric al vîrfului vectorului $\bar{\mathcal{M}}$ în planul complex

$$\left(\mathcal{M}_R - \frac{1}{4\zeta\sqrt{km}}\right)^2 + \left(\mathcal{M}_I - \frac{\lambda}{4\zeta\sqrt{km}}\right)^2 = \frac{1 + \lambda^2}{16\zeta^2 km}, \quad (2.125)$$

reprezentat în figura 2.65 prin cercul trasat cu linie continuă ($\lambda \neq 0$). Cercul $\lambda = 0$ este trasat cu linie întreruptă pe aceeași figură.

Pentru $\lambda > 0$, centrul cercului O' este situat în semiplanul imaginar pozitiv, iar pentru $\lambda < 0$, în semiplanul imaginar negativ. Diametrul la rezonanța amplitudinii este $OM' = \frac{1}{2\zeta} \sqrt{\frac{1 + \lambda^2}{km}}$ și face un unghi arctg λ cu semiaxa reală pozitivă.

Cele două cercuri se intersectează pe axa reală în punctul M , care pe cercul $\lambda = 0$ corespunde pulsației de rezonanță ω_n , iar pe cercul $\lambda \neq 0$, pulsației $\omega' = \omega_n(\sqrt{\zeta^2 \lambda^2 + 1} + \zeta \lambda)$. Raportul de amortizare se calculează pe baza acestor valori, folosind formula [131]

$$\zeta = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\omega'}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega'} \right). \quad (2.126)$$

Masa m se determină apoi cu relația (2.85).

Metoda celor trei cercuri

O localizare mai precisă a pulsației de rezonanță ω_n pe cercul $\lambda = 0$ se realizează prin intersectarea acestuia cu două cercuri de parametri λ_1 , respectiv λ_2 (fig. 2.66). Dacă ω' , respectiv ω'' , sînt pulsațiile punctului M pe cele două cercuri, raportul de amortizare se calculează cu relația

$$\zeta = \frac{\omega'^2 - \omega''^2}{2\omega_n(\lambda_1\omega' - \lambda_2\omega'')}. \quad (2.127)$$

De obicei se alege $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

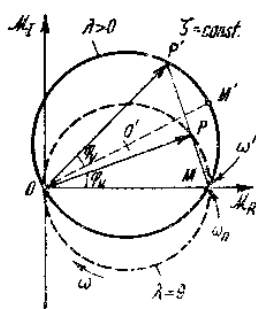


Fig. 2.65

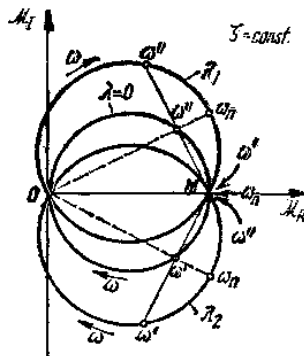


Fig. 2.66

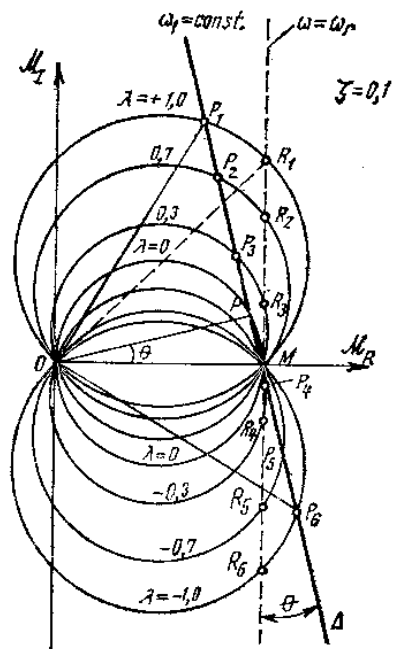


Fig. 2.67

Dacă $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$, relația (2.127) devine [75]

$$\zeta = \frac{1}{2\lambda} \frac{\omega' - \omega''}{\omega_n} = \frac{1}{2\lambda} \frac{\omega' - \omega''}{\sqrt{\omega'\omega''}}. \quad (2.128)$$

Dacă $\lambda_1=1$ și $\lambda_2 = -1$, atunci $\omega' = \omega_2$, $\omega'' = \omega_1$, iar relația (2.128) devine (2.84).

În general, pentru calculul amortizării sînt suficiente cîteva puncte de pe cele trei cercuri, situate în vecinătatea zonei de intersecție.

Metoda liniilor de pulsație constantă

În figura 2.67 s-au trasat diagrame polare ale mobilității complexe (2.124) pentru diferite valori ale parametrului $\lambda = \frac{\hat{f}'}{\hat{f}}$. Toate cercurile

intersectează diagrama polară $\lambda = 0$ în punctul M , care pe acest cerc definește pulsația de rezonanță ω_n . Orice dreaptă Δ care trece prin punctul M , intersectează cercurile în puncte $P_j(j=1, 2, 3 \dots)$ avînd $\omega_j = \text{const.}$

Ecuția acestor drepte se obține eliminînd parametrul λ între expresiile \mathcal{M}_R și \mathcal{M}_I din relația (2.124). Rezultă

$$\mathcal{M}_I = \frac{2\zeta}{\Omega - \frac{1}{\Omega}} \left(\mathcal{M}_R - \frac{1}{2\zeta\sqrt{km}} \right). \quad (2.129)$$

Dacă punctului P de pe cercul $\lambda = 0$ îi corespunde pulsația adimensională Ω , atunci vectorul OP face cu axa reală un unghi

$$\theta = \text{arctg} \frac{\frac{1}{\Omega} - \Omega}{2\zeta}. \quad (2.130)$$

Dreapta Δ , de parametru Ω , va fi perpendiculară pe OP , deci va face unghiul θ cu tangenta în M la cercul $\lambda = 0$.

Valoarea lui λ care corespunde punctului M pe o dreaptă Δ de parametru ω_1 este

$$\lambda_M = \frac{\frac{\omega_n}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_n}}{2\zeta} = \frac{\frac{1}{\Omega_1} - \Omega_1}{2\zeta} = \text{tg } \theta. \quad (2.131)$$

După determinarea pulsației de rezonanță la intersecția dreptei $\omega_1 = \text{const.}$ cu cercul $\lambda = 0$, raportul de amortizare se poate calcula cu relația [75]

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_n}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_n} \right) \cotg \theta. \quad (2.132)$$

Restul parametrilor sistemului se determină pe baza valorii diametrului OM al cercului $\lambda = 0$.

2.4. Metode de excitație cu forță centrifugă aplicată masei

În multe aplicații practice, forțele perturbatoare se datoresc unor mase excentrice în mișcare de rotație. De asemenea, construcția multor vibratoare, folosite la determinarea caracteristicilor dinamice ale terenurilor de fundație și ale izolatoarelor contra vibrațiilor, urmărește realizarea unor forțe armonice, de amplitudine proporțională cu pătratul pulsației. În cele ce urmează se vor considera forțe de forma

$$f(t) = m_0 r \omega^2 \cos \omega t, \quad (2.133)$$

produse de două mase excentrice $\frac{m_0}{2}$, care se rotesc în sensuri contrare, cu viteza unghiulară ω , pe cercuri de rază r (fig. 2.68).

2.4.1. Identificarea parametrilor sistemului cu amortizare histeretică

Ecuția mișcării sistemului din figura 2.68 este

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega} \dot{x} + kx = m_0 r \omega^2 e^{i\omega t}. \quad (2.134)$$

Ea se obține înlocuind $\hat{f} = m_0 r \omega^2$ în ecuația (2.26).

Pentru o soluție staționară

$$x = \tilde{x} e^{i\omega t}, \quad (2.135)$$

folosind notațiile (2.110), se obține

$$\tilde{x} = \frac{m_0 r}{m} \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 + ig}, \quad (2.136)$$

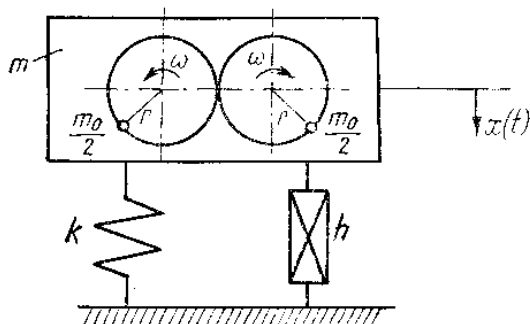


Fig. 2.68

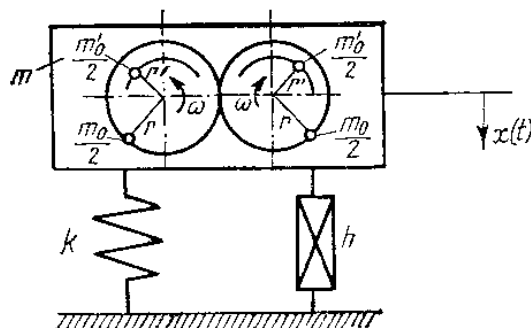


Fig. 2.69

a cărei funcție de răspuns în frecvență este similară cu cea a inertanței complexe (v. tabela 2.1). Rezultă că în acest caz se pot folosi metodele de identificare expuse la § 2.2.1.4.

Metoda forțelor în cvadratură

Dacă la sistemul din figura 2.68 se adaugă două mase excentrice $\frac{m_0'}{2}$, care se rotesc cu viteza unghiulară ω în același plan vertical pe cercuri de rază r' , fiind dispuse la 90° față de razele vectoriale ale maselor $\frac{m_0}{2}$ (fig. 2.69), ecuația mișcării masei m devine

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega} \dot{x} + kx = m_0 r \omega^2 \cos \omega t - m_0' r' \omega^2 \sin \omega t. \quad (2.137)$$

În notație complexă, înlocuind

$$\lambda = \frac{m_0' r'}{m_0 r} \quad (2.138)$$

în ecuația (2.137), se obține

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega} \dot{x} + kx = m_0 r \omega^2 (1 + i\lambda) e^{i\omega t}. \quad (2.139)$$

Pentru o soluție staționară de forma (2.135), amplitudinea complexă a deplasării este

$$\tilde{x} = \frac{m_0 r}{m} \frac{\Omega^2 (1 + i\lambda)}{1 - \Omega^2 + ig}. \quad (2.140)$$

Locul geometric al extremității vectorului \tilde{x} în planul complex este un cerc, trasat cu linie continuă în figura 2.70. Pe același desen s-a trasat, cu linie întreruptă, diagrama polară pentru cazul excitației fără forțe în cvadratură ($\lambda = 0$).

Cele două cercuri se intersectează în punctul R , căruia pe cercul $\lambda = 0$ îi corespunde o pulsație $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 + g^2}$, iar pe cercul $\lambda \neq 0$, o pulsație $\omega^* = \omega_n \sqrt{\frac{1 + g^2}{1 - \lambda g}}$.

Factorul de amortizare se calculează cu relația [93]

$$g = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^{*2}} \right). \quad (2.141)$$

Trebuie remarcat faptul că intersectarea cercurilor are loc în punctul corespunzător rezonanței amplitudinii (pe cercul $\lambda = 0$), diferit de punctul corespunzător rezonanței de fază (punctul M , de pulsație ω_n). Localizarea punctului R este independentă de sistemul de axe, ceea ce conferă o bună precizie metodei. Aplicînd metoda Kennedy-Pancu, dacă pe cercul $\lambda = 0$ se marchează puncte la intervale egale de pulsație $\Delta\omega$, distanța Δs între două puncte succesive va fi maximă tot în vecinătatea lui R , la rezonanța amplitudinii.

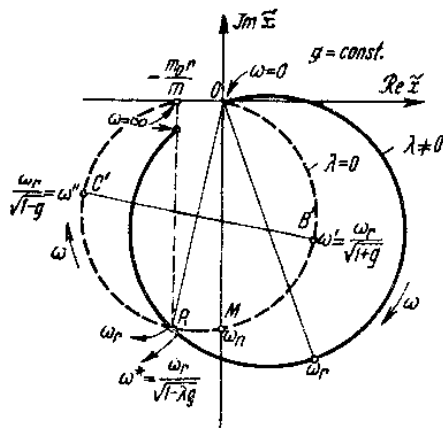


Fig. 2.70

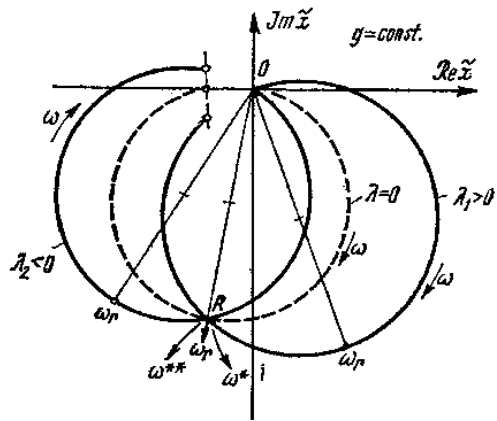


Fig. 2.71

Ceilalți parametri se determină observînd că

$$\overline{OR} = \frac{m_0 r}{m} \sqrt{\frac{1}{g^2} + 1}. \quad (2.142)$$

O localizare mai precisă a punctului R se obține intersectînd cercul $\lambda = 0$ cu două cercuri, trasate folosind mase excentrice plasate la $\pm 90^\circ$ față de masele excentrice inițiale.

Factorul de amortizare se calculează cu relațiile [93]

$$g = \frac{\omega^{*2} - \omega^{**2}}{\lambda_1 \omega^{*2} - \lambda_2 \omega^{**2}} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\omega_r^2}{\omega^{**2}} - \frac{\omega_r^2}{\omega^{*2}} \right), \quad (2.143)$$

unde ω_r , ω^* și ω^{**} sînt pulsațiile corespunzătoare punctului R pe cercurile de parametri $\lambda = 0$, λ_1 , respectiv λ_2 (fig. 2.71).

2.4.2. Identificarea parametrilor sistemului cu amortizare viscoasă

Dacă sistemul din figura 2.34 este acționat de o forță de forma (2.133), ecuația mișcării devine

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 r \omega^2 e^{i\omega t} \quad (2.144)$$

iar pentru o soluție staționară de forma (2.135), amplitudinea complexă a deplasării este

$$\tilde{x} = \frac{m_0 r}{m} \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 + i2\zeta\Omega} = \hat{x} e^{i\varphi_\alpha}. \quad (2.145)$$

Expresia (2.145) este similară cu cea a inertanței complexe, astfel că se pot folosi metodele de identificare expuse la § 2.2.2.4.

Metoda diagramei deplasării

Diagrama din figura 2.72 prezintă variația modulului funcției (2.145) cu pulsația. Prin intersectarea curbei cu o dreaptă oarecare, ce

trece prin origine, se obțin pulsațiile ω_k și ω_l , cu care se calculează pulsația proprie cu relația

$$\omega_n = \sqrt{\omega_k \omega_l}. \quad (2.146)$$

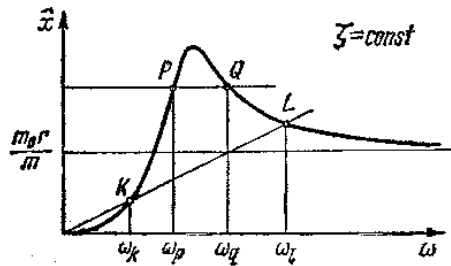


Fig. 2.72

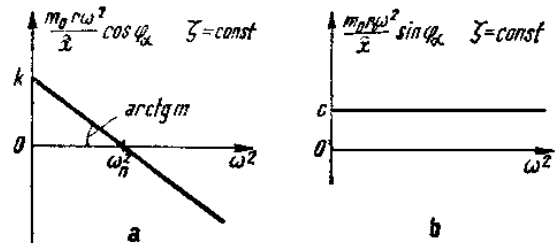


Fig. 2.73

Se intersectează apoi curba cu o dreaptă orizontală oarecare și se măsoară pulsațiile ω_p și ω_q . Raportul de amortizare se calculează din relația [52]

$$2\zeta^2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_n^2}{\omega_p^2} + \frac{\omega_n^2}{\omega_q^2} \right). \quad (2.147)$$

Masa m se calculează pe baza ordonatei asimptotei la $\omega \rightarrow \infty$.

Metoda diagramelor componentelor vectoriale ale obstructanței

Dacă se măsoară simultan amplitudinea deplasării \hat{x} și defazajul φ_α la diferite pulsații ω , se pot trasa prin puncte diagramele cantităților

$$\frac{m_0 r \omega^2}{\hat{x}} \cos \varphi_\alpha = k - m \omega^2, \quad \frac{m_0 r \omega^2}{\hat{x}} \sin \varphi_\alpha = c \quad (2.148)$$

în funcție de ω^2 (fig. 2.73), care sînt linii drepte. Metoda, propusă inițial de Lorenz [71], a fost utilizată cu bune rezultate de mai mulți autori [53].

Metoda diagramei vitezei

Variația amplitudinii vitezei masei m cu pulsația este prezentată în figura 2.74 prin curba de ecuație

$$\hat{\dot{x}} = \omega \hat{x} = \frac{m_0 r}{m} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\Omega^2}{\sqrt{4\zeta^2 + \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2}}. \quad (2.149)$$

Punctele de extremum R și A au ca abscise pulsațiile

$$\omega_{R,A}^2 = \omega_n^2 [2(1 - 2\zeta^2) \mp \sqrt{4(1 - 2\zeta^2)^2 - 3}]. \quad (2.150)$$

Pulsația proprie ω_n se calculează cu formula

$$\omega_n^2 = \frac{\omega_R \omega_A}{\sqrt{3}}. \quad (2.151)$$

Raportul de amortizare rezultă din relația

$$2\zeta^2 = 1 - \frac{\omega_R^2 + \omega_A^2}{4\omega_n^2}. \quad (2.152)$$

Asimptota la $\omega \rightarrow \infty$ trece prin origine și are panta $\text{tg } \theta = \frac{m_0 r}{m}$.

Ea intersectează curba în punctul S , de pulsație $\omega_s = \frac{\omega_n}{\sqrt{2(1-2\zeta^2)}}$ și ordonată

$$\hat{x}_s = \frac{m_0 r}{m} \frac{\omega_n}{\sqrt{2(1-2\zeta^2)}}. \quad (2.153)$$

Masa m se poate calcula pe baza relației (2.153).

În lucrarea [72] se expun alte metode de identificare a parametrilor sistemului cu amortizare viscoasă, bazate pe măsurarea puterii consumate de vibratorul cu mase excentrice sau pe măsurarea forței transmise în punctul de fixare a elementului deformabil.

2.5. Metode de excitație armonică a sistemelor nelegate de un reper fix

Pentru măsurarea caracteristicilor dinamice ale unui izolator de vibrații, acesta se introduce într-un montaj a cărui configurație poate fi modelată ușor, de exemplu printr-un sistem cu parametri concentrați.

Cînd nu se dispune de o bază de rezemare suficient de rigidă, se recurge la sisteme fără legături, a căror analiză se face în cele ce urmează.

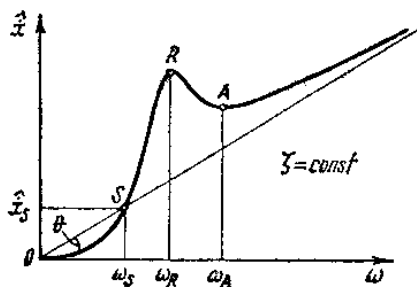


Fig. 2.74

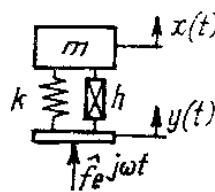


Fig. 2.75

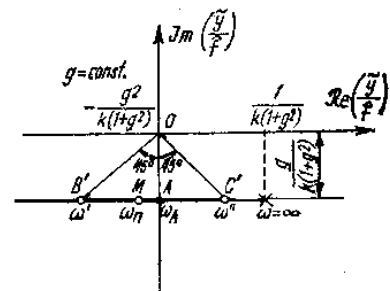


Fig. 2.76

2.5.1. Excitație armonică prin elementul deformabil

În acest paragraf se consideră sisteme cu un grad de libertate, excitate fie cu o forță armonică aplicată elementului deformabil, fie impunând acestuia o mișcare armonică dată.

2.5.1.1. Identificarea parametrilor sistemului cu amortizare histeretică

Fie sistemul din figura 2.75, excitat la bază de o forță armonică $f(t) = \hat{f} e^{i\omega t}$. Dacă se notează cu $y(t) = \tilde{y} e^{i\omega t}$ deplasarea bazei și cu $x(t) = \tilde{x} e^{i\omega t}$ deplasarea masei m , se obține

$$\frac{\tilde{y}}{\hat{f}} = - \frac{1}{k\Omega^2} \frac{1 - \Omega^2 + ig}{1 + ig} = \frac{1}{k} \left[\left(\frac{1}{1 + g^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right) - i \frac{g}{1 + g^2} \right], \quad (2.154)$$

$$\frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\tilde{y}} = \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 + ig}, \quad (2.155)$$

$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = \frac{1 + ig}{1 - \Omega^2 + ig}. \quad (2.156)$$

Reprezentarea expresiei (2.154) în planul complex este o dreaptă paralelă cu axa reală (fig. 2.76). Aceasta intersectează axa imaginară în punctul A , de pulsație $\omega_A = \omega_n \sqrt{1 + g^2}$, corespunzător *antirezonanței* [90]. Liniile OB' și OC' , care fac unghiuri de 45° cu semiaxa imaginară negativă, determină pe dreaptă pulsațiile ω' , $\omega'' = \frac{\omega_A}{\sqrt{1 \pm g}}$ cu care factorul de amortizare g se calculează cu relația

$$g = \frac{\omega''^2 - \omega'^2}{\omega''^2 + \omega'^2}. \quad (2.157)$$

Constanta elastică este

$$k = \frac{g}{(1 + g^2) \overline{OA}} \quad (2.158)$$

unde \overline{OA} este răspunsul la antirezonanță.

Diagrama polară a inversei expresiei (2.154) este un cerc. Acesta se obține prin măsurarea variației cu pulsația a amplitudinii forței \hat{f} necesară pentru a menține constantă amplitudinea deplasării \hat{y} . Amortizarea se evaluează cu relația (2.157) în care ω' și ω'' sînt pulsațiile punctelor de semiputare. Constanta elastică se calculează pe baza diametrului cercului, care reprezintă obstructanța la pulsația de antirezonanță ω_A .

Expresia transmisibilității relative (2.155) este similară cu cea a inertanței sistemului din figura 2.7, deci se folosesc relații de calcul asemănătoare cu cele expuse în § 2.2.1.4. [102].

Mai frecvent este utilizată în practică diagrama polară a transmisibilității absolute (2.156), reprezentată în figura 2.33. În acest caz se poate calcula doar factorul de amortizare, folosind metoda expusă în § 2.2.1.8. Dacă se cunoaște masa m , se determină și constanta elastică k .

Trebuie remarcat că expresiile (2.155) și (2.156) se obțin și în cazul unei excitații cinematice cunoscute a bazei sistemului din figura 2.75.

2.5.1.2. Identificarea parametrilor sistemului cu amortizare viscoasă

Se consideră sistemul din figura 2.77, excitat de forța cunoscută $f(t) = \hat{f} e^{i\omega t}$, la care se măsoară viteza bazei $\dot{y} = \tilde{y} e^{i\omega t}$ și viteza masei $\dot{x} = \tilde{x} e^{i\omega t}$. Se pot stabili următoarele funcții de răspuns în frecvență (mobilități):

$$\overline{M}_y = \frac{\tilde{y}}{\hat{f}} = \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{2\zeta\Omega^2}{1 + 4\zeta^2\Omega^2} + i \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{(1 - 4\zeta^2)\Omega^2 - 1}{\Omega(1 + 4\zeta^2\Omega^2)}, \quad (2.159)$$

$$\overline{M}_x = \frac{\tilde{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{-i}{\Omega}, \quad (2.160)$$

$$\overline{M}_{xy} = \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{2\zeta\Omega^2}{1 + 4\zeta^2\Omega^2} + i \frac{1}{\sqrt{km}} \frac{\Omega}{1 + 4\zeta^2\Omega^2}, \quad (2.161)$$

$$\overline{C}_{\text{abs}} = \frac{\tilde{x}}{\hat{y}} = \frac{1 + i2\zeta\Omega}{1 - \Omega^2 + i2\zeta\Omega}, \quad (2.162)$$

$$\overline{C}_{\text{rel}} = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\hat{y}} = \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 + i2\zeta\Omega}. \quad (2.163)$$

Dacă se notează

$$\overline{M}_y = M_{yR} + iM_{yI} \quad (2.159, a)$$

și se elimină pulsația între expresiile celor două componente ale funcției (2.159), rezultă o curbă de ecuație

$$\left(M_{yR} - \frac{2\zeta}{\sqrt{km}} \right)^2 \left(\frac{1}{2\zeta\sqrt{km}M_{yR}} - 1 \right) = M_{yI}^2, \quad (2.164)$$

reprezentată în figura 2.78.

Pulsația ω_n se determină aproximativ în punctul A , corespunzător antirezonanței. Dacă se dă masa m , se poate deci calcula k . Curba intersectează axa reală în punctul M , de abscisă $\overline{OM} = \frac{2\zeta}{\sqrt{km}}$, de unde se calculează raportul de amortizare ζ .

Diagrama polară a funcției (2.160) este o dreaptă care se confundă cu semi-axa imaginară negativă. Diagrama polară a funcției (2.161) este un semicerc (fig. 2.79). Nici una din ele nu oferă suficiente informații pentru identificarea parametrilor sistemului.

Funcția (2.162) a fost examinată la § 2.2.2.8, iar funcția (2.163) se aseamănă cu cea a inertanței complexe a sistemului excitat prin masă (fig. 2.34) și a fost analizată la § 2.2.2.4.

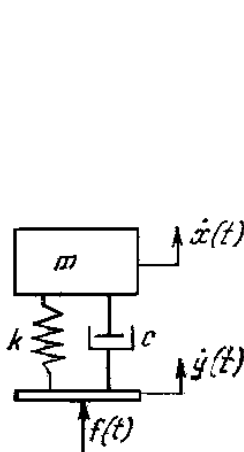


Fig. 2.77

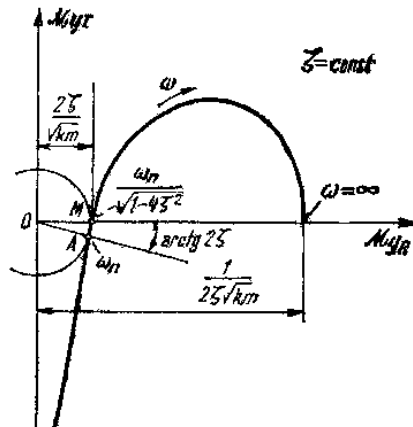


Fig. 2.78

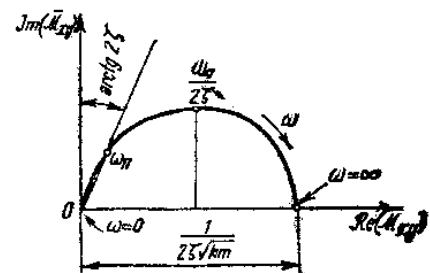


Fig. 2.79

Rezultate mai bune se obțin prin analiza grafică a diagramei polare a inversei funcției (2.159), adică a impedanței directe

$$\bar{Z}_y = \frac{\tilde{f}}{\hat{y}} = \sqrt{km} \frac{2\zeta\Omega^4}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2} + i\sqrt{km} \frac{\Omega(1 - \Omega^2 + 4\zeta^2\Omega^2)}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2} \quad (2.165)$$

În figura 2.80 s-a reprezentat prin linie continuă funcția adimensională $\frac{\bar{Z}_y}{\sqrt{km}}$ pentru $\zeta = 0,1$. Diagrama începe în origine la $\Omega = 0$,

trece prin valoarea maximă la pulsația de antirezonanță $\Omega_A \cong 1$, intersectează axa reală la $\Omega_M = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\zeta^2}}$ și revine pe axa reală în punctul

$N(2\zeta, 0)$ pentru $\Omega \rightarrow \infty$. Punctul A se poate determina cu criteriul Kennedy-Pancu, în zona unde unor creșteri egale $\Delta\Omega$ ale pulsației adimensionale le corespunde un arc de curbă de lungime maximă.

În figura 2.80 s-au trasat cu linii întrerupte diagramele polare ale funcției \bar{Z}_y/\sqrt{km} în cazul excitației cu forțe în cvadratură, deci când $f(t) = \hat{f}(1 + i\lambda)e^{i\omega t}$. Curba $\lambda = 0$ intersectează aceste diagrame în puncte definite practic de pulsația $\Omega_A = 1$.

În vecinătatea antirezonanței, diagrama $\lambda = 0$ poate fi aproximată printr-un arc de cerc, cu centrul în mijlocul diametrului OA, cores-

punzînd unei funcții de răspuns în frecvență

$$\frac{\bar{Z}_y}{\sqrt{km}} = \frac{1 + i2\zeta}{2\zeta - i(1 - \Omega^2)} = Z_{yR} + iZ_{yI}. \quad (2.166)$$

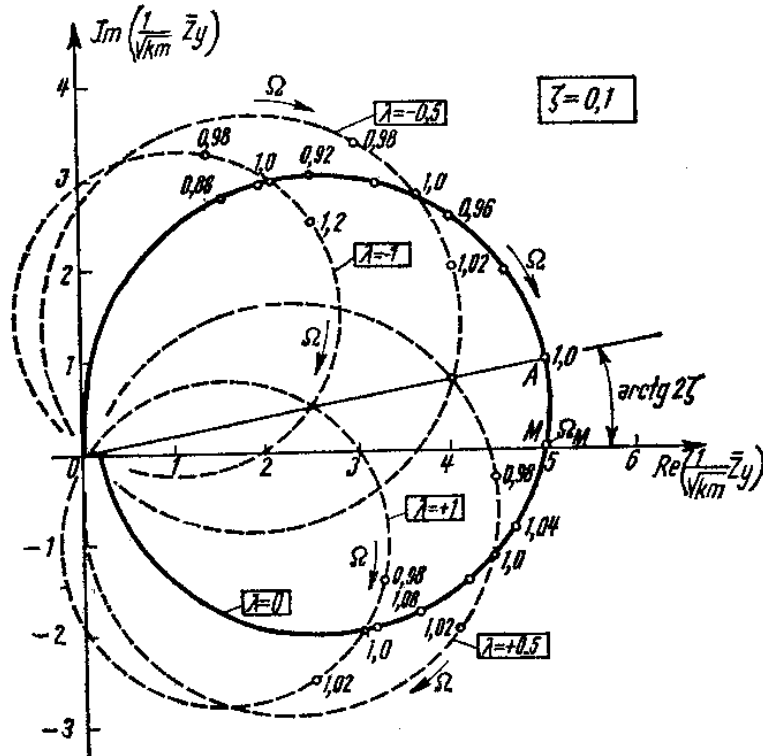


Fig. 2.80

Analog, diagramele obținute folosind excitație cu forțe în cvadratură pot fi approximate, în zona în care intersectează diagrama $\lambda = 0$, prin cercuri ce corespund unor funcții $\frac{Z_{yR} + iZ_{yI}}{1 + i\lambda}$.

Cercul de parametru λ intersectează cercul $\lambda = 0$ în punctul de pulsație $\Omega = \sqrt{1 + 2\zeta\lambda}$. Dacă se trasează două astfel de cercuri, de parametri λ_1 și λ_2 , și se determină pulsațiile Ω_1 , respectiv Ω_2 , de intersecție cu cercul $\lambda = 0$, raportul de amortizare se calculează cu relația

$$\zeta = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_A^2}. \quad (2.167)$$

Relația (2.167) dă o bună aproximație a valorii lui ζ și în cazul diagramelor din figura 2.80. Cunoscînd valoarea masei m , se calculează apoi constanta elastică dinamică $k = m\omega_A^2$.

2.5.2. Excitație armonică a sistemului cu două mase

Realizarea experimentală a schemei de solicitare din figura 2.75 întâmpină greutăți datorită faptului că forța de excitație nu se aplică direct elementului deformabil al sistemului studiat, ci prin intermediul unei mase. Compensarea acestei mase necesită operații suplimentare sau echipament specializat [95] astfel că este necesară analiza răspunsului dinamic al sistemului masă-element deformabil-masă, care are un grad de libertate dacă drept coordonată se alege deplasarea relativă a celor două mase. Aceasta este proporțională cu deformația specifică dinamică a materialului din care este executat practic elementul deformabil, ceea ce permite o definire corectă a rezonanței sistemului studiat.

2.5.2.1. Identificarea parametrilor sistemului cu amortizare histeretică

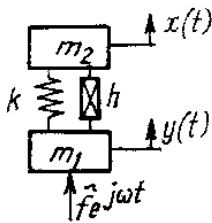


Fig.2.81

La sistemul din figura 2.81, solicitat de forța $f(t) = \hat{f}e^{i\omega t}$ aplicată masei m_1 , fie $y = \tilde{y}e^{i\omega t}$ deplasarea masei m_1 și $x = \tilde{x}e^{i\omega t}$ deplasarea masei m_2 . Dacă se notează

$$p = \sqrt{\frac{k}{m_2}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{p}, \quad \gamma = \frac{m_1}{m_2}, \quad g = \frac{h}{k}, \quad (2.168)$$

se obțin următoarele funcții de răspuns în frecvență:

$$\bar{\alpha}_y = \frac{\tilde{y}}{\hat{f}} = -\frac{1}{k(1+\gamma)\Omega^2} \frac{1 - \Omega^2 + ig}{1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\Omega^2 + ig}, \quad (2.169)$$

$$\bar{\alpha}_x = \frac{\tilde{x}}{\hat{f}} = -\frac{1}{k(1+\gamma)\Omega^2} \frac{1 + ig}{1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\Omega^2 + ig}, \quad (2.170)$$

$$\bar{\alpha}_{xy} = \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{k(1+\gamma)} \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\Omega^2 + ig}. \quad (2.171)$$

Metoda diagramei receptanței relative

Diagrama polară a funcției (2.171), desenată în figura 2.82 cu linie continuă, este un cerc, tangent în origine la axa reală. Cercul intersectează semiaxa imaginară negativă în punctul M , de pulsație

$$\omega_M = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}, \quad (2.172)$$

care coincide cu pulsația de rezonanță a sistemului neamortizat.

Într-un baleiaj de frecvență cu forță de amplitudine constantă, la pulsația ω_M deplasarea relativă a celor două mase este maximă.

Punctul M poate fi localizat cu metoda Kennedy-Pancu, în zona unde $\frac{\Delta s}{\Delta \omega}$ este maxim (Δs este arcul de cerc corespunzător unei creșteri $\Delta \omega$ a pulsației). De asemenea, intersecția cu două cercuri desenate cu linie întreruptă, obținute în cazul excitației cu forțe în cvadratură, se face tot în punctul M .

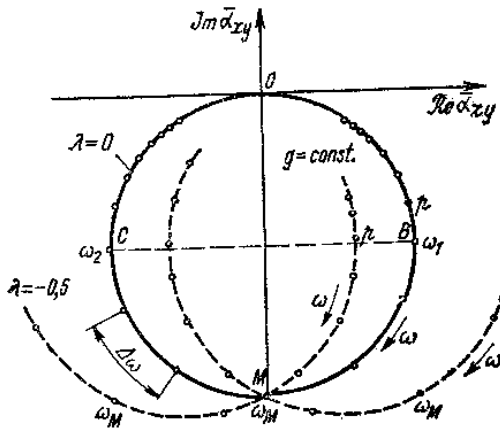


Fig. 2.82

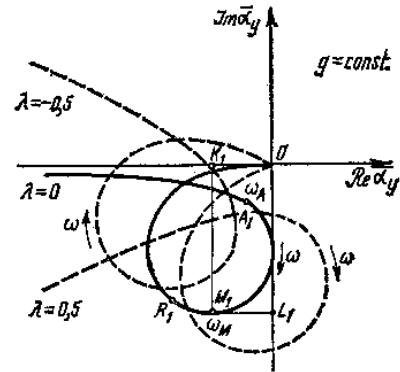


Fig. 2.83

Diametrul la rezonanță este

$$\overline{OM} = \frac{1}{h(1 + \gamma)} = \frac{m_2}{kg(m_1 + m_2)} = \frac{1}{gm_1\omega_M^2}. \quad (2.173)$$

Trasînd diametrul BC , perpendicular pe OM , se determină pulsațiile

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_M^2 (1 \mp g)$$

cu care se calculează factorul de amortizare

$$g = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_M^2}. \quad (2.174)$$

Din relațiile (2.172) și (2.173) se determină apoi k și una din mase, dacă se dă cealaltă masă.

Metoda diagramei receptanței directe

În figura 2.83 s-a desenat cu linie continuă diagrama polară a funcției (2.169). Rezonanța, definită prin pulsația ω_M , la care „o forță minimă produce o deplasare relativă maximă a celor două mase” [90], apare în punctul M_1 , în care componenta imaginară a receptanței directe are o valoare extremă.

Abscisa punctului M_1 este independentă de amortizarea din sistem. În valoare absolută,

$$\overline{M_1L_1} = \frac{\gamma}{(1 + \gamma)^2} \frac{1}{k} = \frac{1}{(m_1 + m_2)\omega_M^2}. \quad (2.175)$$

Ordonata punctului M_1 (în valoare absolută) este

$$\overline{K_1 M_1} = \frac{1}{h(1 + \gamma)^2} = \frac{k}{gm_1^2 \omega_M^4} = \frac{m_2}{gm_1(m_1 + m_2)\omega_M^2}. \quad (2.176)$$

Pulsația ω_M și coordonatele punctului M_1 se pot măsura experimental.

Dacă se cunoaște una din mase, atunci din relația (2.175) rezultă cealaltă masă, apoi din (2.172) — constanta elastică, iar din (2.176) — factorul de amortizare. Dacă nu se cunoaște nici una din mase, atunci se poate face o identificare aproximativă, considerînd că pulsația de anti-rezonanță $\omega_A \cong p = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$.

Pe figura 2.83 s-au desenat (cu linie întreruptă) două curbe ale receptanței directe, trasate în cazul excitației cu forțe în cvadratură $f(t) = \hat{f}(1 + i\lambda)e^{i\omega t}$. Punctul R_1 , situat pe diagrama $\lambda = 0$ la mijlocul distanței între punctele de intersecție cu diagramele $\lambda = \pm 0,5$, coincide aproximativ cu punctul de amplitudine maximă a răspunsului. Rezultă că nici criteriul amplitudinii maxime, nici metoda celor trei diagrame nu pot fi utilizate pentru localizarea rezonanței.

Metoda diagramei receptanței de transfer

Diagrama polară a funcției (2.170) este reprezentată prin linie continuă în figura 2.84. Cu linii întrerupte s-au trasat două curbe corespunzătoare excitației cu forțe în cvadratură (pentru $\lambda = \pm 0,5$). Acestea marchează pe diagrama $\lambda = 0$, punctul R_2 , de amplitudine maximă și de pulsație

$$\omega_R^2 = p^2 \frac{1 + \gamma}{4\gamma} (3 + \sqrt{1 - 8g^2}) = \frac{\omega_M^2}{4} (3 + \sqrt{1 - 8g^2}), \quad (2.178)$$

care diferă de punctul M_2 , de pulsație ω_M , în care componenta imaginară a receptanței de transfer are o valoare extremă.

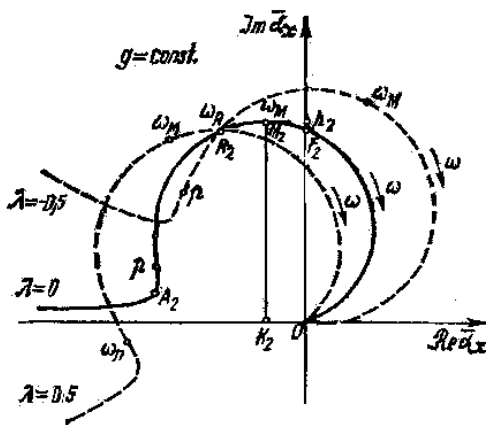


Fig. 2.84

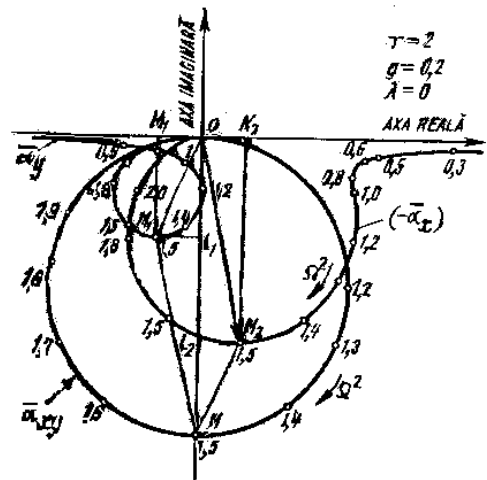


Fig. 2.85

Abscisa punctului M_2 este egală cu cea din figura 2.83, deci independență de amortizare

$$\overline{M_2 L_2} = \frac{1}{(m_1 + m_2)\omega_M^2} \quad (2.179)$$

iar ordonata

$$\overline{K_2 M_2} = \frac{\gamma}{h(1 + \gamma)^2} = \frac{1}{g(m_1 + m_2)\omega_M^2}. \quad (2.180)$$

Diagrama $\lambda = 0$ intersectează axa imaginară în punctul F_2 , de pulsație

$$\omega_F = \omega_M \sqrt{1 + g^2}. \quad (2.181)$$

Dacă se cunoaște una din mase, de exemplu m_1 , din (2.172) și relațiile de mai sus se pot calcula apoi m_2 , k și g .

Diagrama din figura 2.82 se poate trasa punct cu punct, prin compunerea grafică a curbelor din figurile 2.83 și 2.84 (fig. 2.85).

2.5.2.2. Identificarea parametrilor sistemului cu amortizare viscoasă

La sistemul din figura 2.86, solicitat de forța armonică $f(t) = \hat{f}e^{i\omega t}$ aplicată masei m_1 , se măsoară viteza $\dot{y} = \tilde{y} e^{i\omega t}$ a masei m_1 și viteza $\dot{x} = \tilde{x} e^{i\omega t}$ a masei m_2 . Dacă se notează

$$p = \sqrt{\frac{k}{m_2}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{p}, \quad \gamma = \frac{m_1}{m_2}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km_2}} \quad (2.182)$$

se obțin următoarele funcții de răspuns în frecvență

$$\overline{M_y} = \frac{\tilde{y}}{\hat{f}} = \frac{1}{\sqrt{km_2}} \frac{1}{1 + \gamma} \frac{2\zeta\Omega - i(1 - \Omega^2)}{\Omega \left(1 - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \Omega^2\right) + i2\zeta\Omega^2}, \quad (2.183)$$

$$\overline{M_x} = \frac{\tilde{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{\sqrt{km_2}} \frac{1}{1 + \gamma} \frac{2\zeta\Omega - i}{\Omega \left(1 - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \Omega^2\right) + i2\zeta\Omega^2}, \quad (2.184)$$

$$\overline{M_{xy}} = \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{\sqrt{km_2}} \frac{1}{1 + \gamma} \frac{1}{2\zeta - i \frac{1}{\Omega} \left(1 - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \Omega^2\right)}. \quad (2.185)$$

Metoda diagramei mobilității relative

În planul complex, locul geometric al afixelor funcției (2.185) este un cerc tangent în origine la axa imaginară (fig. 2.87).

Cercul intersectează axa reală în punctul M , de pulsație

$$\omega_M = \sqrt{k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} = p \sqrt{\frac{1 + \gamma}{\gamma}}. \quad (2.186)$$

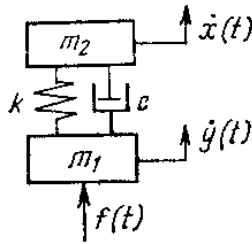


Fig. 2.86

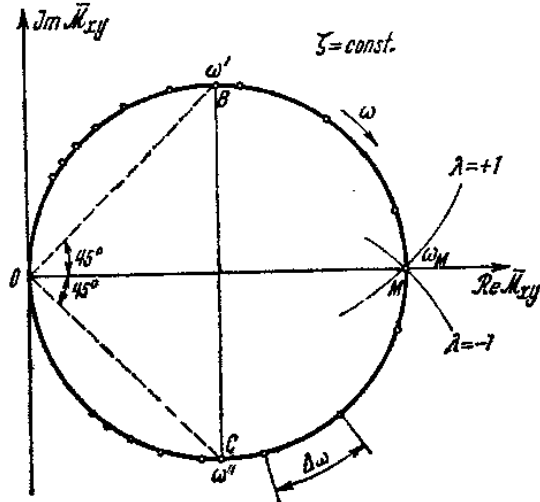


Fig. 2.87

Diametrul la rezonanță este

$$\overline{OM} = \frac{1}{\sqrt{km_2}} \frac{1}{2\zeta(1 + \gamma)} = \frac{1}{2\zeta p(m_1 + m_2)} = \frac{1}{2\zeta m_1 \omega_M} \sqrt{\frac{\gamma}{1 + \gamma}}. \quad (2.187)$$

Diametrul BC , perpendicular pe OM , determină pe cerc pulsațiile ω' și ω'' , între care se stabilesc relațiile

$$\omega' \omega'' = \omega_M^2, \quad (2.188)$$

$$\omega'' - \omega' = 2\zeta \frac{1 + \gamma}{\gamma} p = 2\zeta \frac{\omega_M^2}{p} = 2\zeta \omega_M \sqrt{\frac{1 + \gamma}{\gamma}}. \quad (2.189)$$

Dacă se cunoaște una din mase, de exemplu m_1 , din relațiile (2.187) și (2.189) se calculează ζ și γ , deci masa m_2 , apoi din (2.186) rezultă k .

Metoda diagramei mobilității directe

Diagrama polară a funcției (2.183) este desenată cu linie continuă în figura 2.88.

Rezonanța apare în punctul M_1 , de pulsație ω_M , unde componenta reală a mobilității directe are o valoare maximă. Coordonatele punctului

M_1 sînt (în modul)

$$\overline{K_1 M_1} = \frac{1}{\sqrt{km_2}} \frac{1}{2\zeta(1+\gamma)^2} = \frac{1}{2\zeta\omega_M m_1} \sqrt{\frac{\gamma}{(1+\gamma)^3}}, \quad (2.190)$$

$$\overline{L_1 M_1} = \frac{1}{\sqrt{km_2}} \frac{1}{1+\gamma} \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}} = \frac{1}{m_2\omega_M(1+\gamma)} = \frac{1}{(m_1+m_2)\omega_M}. \quad (2.191)$$

Ordonata $\overline{L_1 M_1}$ este independentă de amortizarea din sistem.

Dacă se dă masa m_1 , din relațiile (2.190) și (2.191) se calculează ζ și γ , deci m_2 , apoi din (2.186) se obține k .

Dacă nu se cunoaște nici una din mase, atunci se poate considera aproximativ că antirezonanța (punctul A) apare la pulsația

$$\omega_A \cong p = \sqrt{\frac{k}{m_2}}. \quad (2.192)$$

Cele patru necunoscute ζ , k , m_1 și m_2 se calculează din relațiile (2.186), (2.190), (2.191) și (2.192).

Metoda forțelor în cvadratură nu duce la localizarea punctului M_1 . Astfel, intersecția curbei $\lambda = 0$, cu curbele $\lambda = \pm 0,5$ (desenate cu linie întreruptă) nu se face într-un punct, definindu-se în acest caz aproximativ punctul R_1 , de amplitudine maximă [91].

Metoda diagramei mobilității de transfer

Diagrama polară a funcției (2.184) este trasată cu linie continuă în figura 2.89.

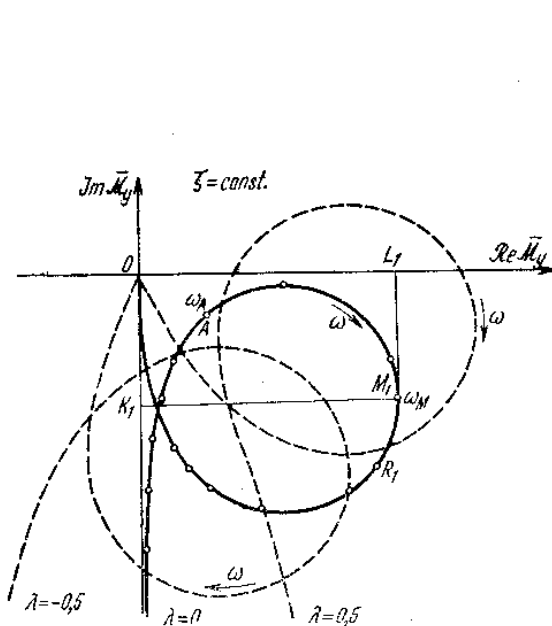


Fig. 2.88

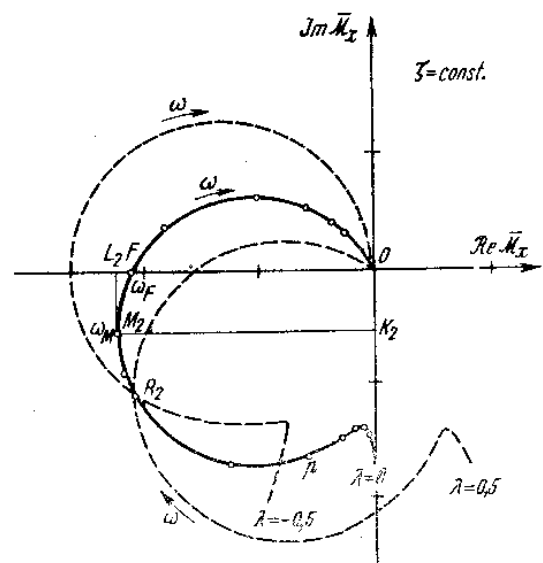


Fig. 2.89

Punctul M_2 , de pulsație ω_M (2.186), corespunde valorii extreme a componentei reale a mobilității de transfer și are coordonatele

$$\overline{K_2 M_2} = \frac{1}{2\zeta\omega_M m_1} \sqrt{\frac{\gamma^3}{(1+\gamma)^3}} \quad (2.193)$$

$$\overline{L_2 M_2} = \frac{1}{\omega_M m_2 (1+\gamma)} = \frac{1}{\omega_M (m_1 + m_2)} \quad (2.194)$$

ultima — independentă de amortizare și egală cu $\overline{L_1 M_1}$ (fig. 2.88).

Dacă se dă masa m_1 , din relațiile (2.193) și (2.194) se calculează ζ și m_2 , iar din (2.186) — constanta elastică k .

Din nou trebuie remarcat că metoda forțelor în cvadratură duce la localizarea punctului R_2 , de amplitudine maximă a răspunsului, diferit de M_2 .

Punctului F , de intersecție a diagramei $\lambda = 0$ cu axa reală, îi corespunde pulsația

$$\omega_F = \frac{\omega_M}{\sqrt{1 - \frac{1+\gamma}{\gamma} 4\zeta^2}}.$$

2.6. Metode de identificare fără baleiaj de frecvență

În cele ce urmează se prezintă câteva metode de identificare, care în principal nu se bazează pe analiza grafică a curbelor de răspuns în frecvență, trasate în urma unui baleiaj de frecvență.

2.6.1. Metoda „deplasării” frecvențelor (proprie)

Pulsația de rezonanță a sistemului cu un grad de libertate depinde de masa m și de constanta elastică k . Prin modificarea acestora se poate produce o variație (deplasare, *lunecare*) a pulsației de rezonanță, pe baza căreia se calculează valorile parametrilor sistemului inițial.

2.6.1.1. Metoda maselor adiționale

Receptanța complexă a sistemului din figura 2.7 are expresia

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \frac{m}{k} \omega^2 + ig}. \quad (2.195)$$

Pe diagrama polară corespunzătoare (fig. 2.90,a), se marchează punctul M , de pulsație $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, cu unul din criteriile de localizare a rezonanței discutate la § 2.2.

La masa inițială m , se adaugă o masă Δm , astfel încît

$$\gamma = \frac{\Delta m}{m} . \quad (2.196)$$

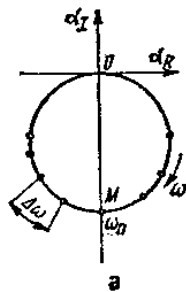


Fig. 2.90

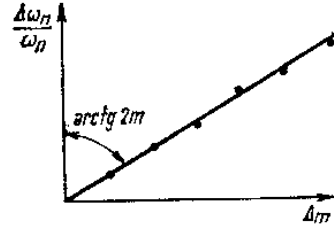
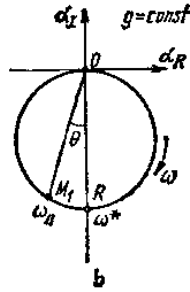


Fig. 2.91

Receptanța complexă a sistemului nou format are expresia

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \frac{m}{k} \omega^2(1 + \gamma) + ig} . \quad (2.197)$$

Diagrama polară a funcției (2.197) este un cerc de același diametru (fig. 2.90, *b*), însă cu o altă repartiriție a parametrului ω .

Pulsația de rezonanță a noului sistem, corespunzătoare punctului R , este

$$\omega^* = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 + \gamma}} . \quad (2.198)$$

Raza vectorie a punctului M_1 , de pulsație ω_n , face cu diametrul OR un unghi

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{g} . \quad (2.199)$$

Din relația (2.198) se calculează masa sistemului inițial

$$m = \frac{\Delta m}{\left(\frac{\omega_n}{\omega^*}\right)^2 - 1} , \quad (2.200)$$

apoi constanta elastică

$$k = \omega_n^2 m . \quad (2.201)$$

Din relația (2.199) rezultă factorul de amortizare

$$g = \frac{\Delta m}{m} \cotg \theta . \quad (2.202)$$

Dacă sistemul de măsură este etalonat, se cunoaște diametrul \overline{OM} și se calculează g cu relația

$$g = \frac{1}{k \cdot OM}. \quad (2.203)$$

În aplicațiile practice, se folosește o relație aproximativă [126] care, atunci când masele adiționale sînt mici în comparație cu masa inițială, dă rezultate suficient de precise.

Dacă se notează variația pulsației de rezonanță cu

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega^*, \quad (2.204)$$

atunci se poate exprima constanta elastică k în funcție de mărimile de dinainte și de după adăugarea masei Δm

$$k = m\omega_n^2 = (m + \Delta m)(\omega_n - \Delta\omega_n)^2.$$

Neglijînd infiniții mici de ordin superior, se obține

$$m \cong \frac{\omega_n}{2} \frac{\Delta m}{\Delta\omega_n}. \quad (2.205)$$

Practic, se măsoară $\Delta\omega_n$ pentru diferite valori Δm și se reprezintă grafic variația raportului $\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n}$ cu Δm (fig. 2.91). Prin punctele astfel obținute se duce o linie dreaptă, a cărei pantă dă valoarea masei m .

2.6.1.2. Metoda constantelor elastice adiționale

Dacă la sistemul din figura 2.7 se modifică constanta elastică cu Δk , astfel încît

$$\alpha = \frac{\Delta k}{k}, \quad (2.206)$$

receptanța complexă (2.195) devine

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{k(1 + \alpha)} \frac{1}{1 - \frac{m}{k(1 + \alpha)} \omega^2 + ig}. \quad (2.207)$$

Diagramele polare ale funcțiilor (2.195) și (2.207) sînt prezentate în figura 2.92.

Pulsația de rezonanță a sistemului modificat este $\omega^{**} = \omega_n \sqrt{1 + \alpha}$, deci se poate calcula constanta elastică inițială.

$$k = \frac{\Delta k}{\left(\frac{\omega^{**}}{\omega_n}\right)^2 - 1}, \quad (2.208)$$

apoi masa

$$m = \frac{k}{\omega_n^2}. \quad (2.209)$$

Pe diagrama polară a sistemului modificat se măsoară unghiul θ făcut de raza vectorie a punctului de pulsație ω_n cu diametrul OR .

Factorul de amortizare se calculează cu relația

$$g = \frac{\cotg \theta}{1 + \frac{k}{\Delta k}} \quad (2.210)$$

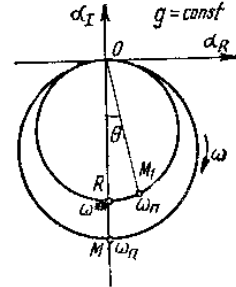


Fig. 2.92

care nu necesită o etalonare a sistemului.

Constanta elastică se poate calcula și din raportul diametrelor celor două cercuri

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OR}} = 1 + \frac{\Delta k}{k}. \quad (2.211)$$

Din punct de vedere practic, modificarea constantei elastice a sistemului este mai greu de efectuat decât modificarea masei, astfel că metoda nu este folosită sub forma prezentată mai sus. Se recurge la *constante elastice* produse pe cale electrică [130], dar pentru aceasta este nevoie de un echipament special.

De fapt, metoda forțelor în cvadratură, prezentată în § 2.3, poate fi considerată o variantă a metodei constantelor elastice adiționale [131].

Ecuția (2.120) se poate scrie sub forma

$$\left(im\omega + c + \frac{k}{i\omega} \right) \tilde{x} = \hat{f} + i\lambda\hat{f}. \quad (2.212)$$

Egalînd părțile reală și imaginară, pentru $\omega = \omega'$ rezultă (fig. 2.65)

$$c\hat{x} = \hat{f}, \quad (2.213)$$

$$\left(im\omega' + \frac{k}{i\omega'} \right) \hat{x} = i\lambda\hat{f}, \quad (2.214)$$

sau

$$m\omega'^2 - \left(k + \frac{\lambda\omega'f}{\hat{x}} \right) = 0. \quad (2.215)$$

Termenul

$$\frac{\lambda\omega'f}{\hat{x}} = \lambda \frac{\hat{f}}{\hat{x}} = k' \quad (2.216)$$

joacă rolul unei constante elastice suplimentare.

Se poate scrie deci

$$\begin{aligned} m\omega_n^2 &= k, \\ m\omega'^2 &= k + k', \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$m = \frac{k'}{\omega'^2 - \omega_n^2} = \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega_n^2} \frac{\lambda \hat{f}}{\hat{x}}. \quad (2.217)$$

Folosind apoi relațiile (2.213) și (2.217), se obține formula (2.126).

2.6.2. Metoda energiei introduse în sistem

În cazul regimului staționar de vibrații forțate, energia introdusă în sistem într-un ciclu de vibrație (egală cu lucrul mecanic al forței de excitație)

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} f(t) dx &= \int_t^{t+T} f(t) \dot{x}(t) dt = \int_t^{t+T} \hat{f} \cos \omega t \frac{d}{dx} [\hat{x} \cos(\omega t + \varphi)] dt = \\ &= \pi \hat{f} \hat{x} \sin \varphi. \end{aligned}$$

este egală, la rezonanță, cu energia disipată prin amortizări [125]. Pentru $\omega = \omega_n$,

$$W_d = \pi \hat{f} \hat{x}_0, \quad (2.218)$$

deci W_d se poate determina direct, folosind un wattmetru — în cazul excitației electrice (W_d fiind proporțională cu puterea cedată de sursă sistemului) sau măsurînd \hat{f} și \hat{x}_0 .

La sistemul cu amortizare viscoasă

$$\hat{f} = c\omega_n \hat{x}_0 = 2\zeta m\omega_n^2 \hat{x}_0, \quad (2.219)$$

deci

$$W_d = \pi c\omega_n \hat{x}_0^2 = 2\pi\zeta m\omega_n^2 \hat{x}_0^2. \quad (2.220)$$

Energia cinetică maximă a sistemului este

$$W_e = \frac{1}{2} m\omega_n^2 \hat{x}_0^2. \quad (2.221)$$

Din relațiile (2.220) și (2.221) rezultă cunoscuta relație a factorului de pierderi [46] :

$$\zeta = \frac{1}{4\pi} \frac{W_d}{W_e} \quad (2.222)$$

Aceasta poate fi folosită numai dacă se cunoaște masa m care intervine în calculul lui W_c .

Rezultă că metoda energiei furnizează valori pentru produsul ζm

$$\zeta m = \frac{\hat{f}}{2\omega_n^2 \hat{x}_0} = \frac{W_a}{2\pi \omega_n^2 \hat{x}_0^2}, \quad (2.223)$$

urmînd ca unul din acești parametri să fie determinat cu altă metodă.

Uneori, în relația (2.133), raportul $\frac{\hat{f}}{\hat{x}_0}$ se calculează ca pantă a liniei trasată în coordonate $\hat{f} - \hat{x}_0$, într-o măsurare în care, variînd amplitudinea excitației \hat{f} , se înregistrează variația corespunzătoare a amplitudinii deplasării la rezonanță \hat{x}_0 .

2.6.3. Metoda răspunsului tranzitoriu

Ecuția diferențială a vibrațiilor forțate amortizate ale sistemului cu un grad de libertate și amortizare viscoasă

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \hat{f} \cos \omega t \quad (2.224)$$

are o soluție generală de forma

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + B \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t) + \hat{x} \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.225)$$

unde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n}, \quad \hat{x} = \frac{\hat{f}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}},$$

$$\varphi = \arctg \frac{-c\omega}{k - m\omega^2}, \quad (2.226)$$

iar A și B sînt constante de integrare ale căror valori depind de condițiile inițiale.

Primul termen din membrul drept al expresiei (2.225) reprezintă soluția ecuației (2.224) pentru $\hat{f} = 0$, iar al doilea termen este soluția particulară pentru excitația armonică cu forță de amplitudine constantă.

2.6.3.1. Răspuns tranzitoriu „crescător”

Se consideră mișcarea tranzitorie a sistemului din figura 2.7, care pornește din repaus, fiind acționat de la momentul $t = 0$ de forța $f(t) = \hat{f} \cos \omega_n t$, de pulsație egală cu pulsația proprie a sistemului neamortizat.

Deoarece $\omega = \omega_n$, în relațiile (2.226) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\hat{x} = \frac{\hat{f}}{c\omega_n} = \frac{\hat{f}}{2k\zeta}$ și deoarece la $t = 0$, $x = 0$ și $\dot{x} = 0$, soluția generală (2.225) devine

$$x = \frac{\hat{f}}{2k\zeta} \left(\sin \omega_n t - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right). \quad (2.227)$$

Se va examina în continuare răspunsul tranzitoriu al sistemelor slab amortizate. În practică, la majoritatea structurilor, $\zeta = 0,01 \dots 0,04$, deci pseudopulsatia $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ se poate considera egală cu pulsația proprie ω_n , iar $\sqrt{1-\zeta^2} \cong 1$.

În acest caz se obține

$$x(t) = \frac{\hat{f}}{2k\zeta} (1 - e^{-\zeta\omega_n t}) \sin \omega_n t. \quad (2.228)$$

Forma acestei curbe este prezentată în figura 2.93.

Cele două înfășurătoare, de ecuații

$$y = \pm \frac{\hat{f}}{2k\zeta} (1 - e^{-\zeta\omega_n t}), \quad (2.229)$$

tind asimptotic spre amplitudinea regimului staționar de vibrații forțate, la rezonanța de fază

$$\hat{x}_\infty = \frac{\hat{f}}{2k\zeta}. \quad (2.230)$$

Considerînd numai ramura pozitivă, se poate scrie

$$\hat{x}_\infty - y = \hat{x}_\infty e^{-\zeta\omega_n t}$$

sau

$$\ln(\hat{x}_\infty - y) = \ln \hat{x}_\infty - \zeta\omega_n t. \quad (2.231)$$

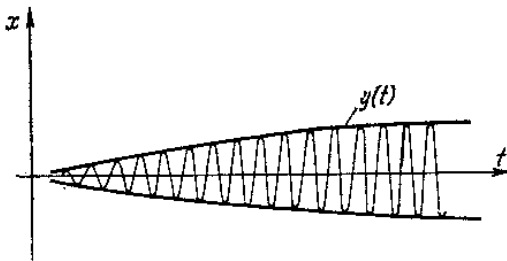


Fig. 2.93

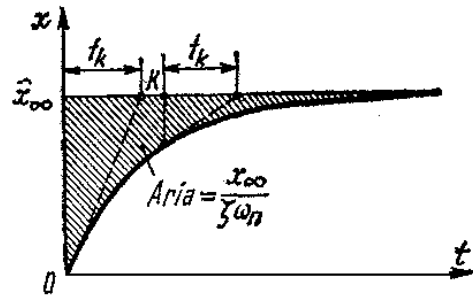


Fig. 2.94

Graficul expresiei $\ln(\hat{x}_\infty - y)$, reprezentată în funcție de timp, este o linie dreaptă de pantă $\zeta\omega_n$. Prin urmare, dacă se cunoaște ω_n , se poate determina experimental raportul de amortizare [46].

O metodă mai simplă se bazează pe construcția din figura 2.94. Tangenta în origine la înfășurătoare intersectează asimptota în punctul K , de abscisă

$$t_k = \frac{1}{\zeta\omega_n}. \quad (2.232)$$

Constanta de timp t_k se poate exprima în funcție de perioada $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$ prin relația $t_k = nT$. Rezultă

$$\zeta = \frac{1}{2\pi n} \quad (2.233)$$

apoi, dacă înregistrarea este suficient de lungă, din ordonata asimptotei se calculează k .

Uneori se calculează aria suprafeței hașurate $\hat{x}_\infty \int_0^\infty e^{-\zeta\omega_n t} dt = \frac{\hat{x}_\infty}{\zeta\omega_n}$, de unde rezultă ζ .

Derivata expresiei (2.228) este

$$\frac{dx}{dt} = \omega_n \frac{\hat{f}}{2k\zeta} [(1 - e^{-\zeta\omega_n t}) \cos \omega_n t + \zeta e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n t]. \quad (2.234)$$

Neglijînd ultimul termen, se obține

$$\dot{x}(t) \cong \frac{\hat{f}\omega_n}{2k\zeta} (1 - e^{-\zeta\omega_n t}) \cos \omega_n t. \quad (2.235)$$

Se poate folosi deci construcția din figura 2.94 [6] și atunci cînd se dispune de o înregistrare a variației vitezei în timp (în acest caz, ordonata asimptotei este $\frac{\omega_n \hat{f}}{2k\zeta} = \frac{\hat{f}}{c}$).

2.6.3.2. Răspuns tranzitoriu „descrescător”

Se consideră acum mișcarea tranzitorie a sistemului din figura 2.7, care inițial execută vibrații forțate în regim staționar, cu pulsația ω_n și amplitudinea (2.230), după care excitația a fost înlăturată brusc.

Soluția generală a vibrațiilor libere amortizate este dată de primul termen din membrul drept al expresiei (2.225).

Dacă la $t = 0$ se alege $x = \hat{x}_0$ și $\dot{x} = 0$, rezultă

$$x = \hat{x}_0 e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right). \quad (2.236)$$

Dacă, în cazul amortizării reduse, se neglijează ζ^2 față de 1, atunci se obține

$$x \cong \hat{x}_0 e^{-\zeta \omega_n t} (\cos \omega_n t + \zeta \sin \omega_n t), \quad (2.237)$$

$$\dot{x} \cong -\omega_n \hat{x}_0 e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n t. \quad (2.238)$$

Se poate considera (aproximativ) că înfășurătoarele (fig. 2.95)

$$y_1 = \hat{x}_0 e^{-\zeta \omega_n t}, \quad (2.239)$$

$$y_2 = -\hat{x}_0 e^{-\zeta \omega_n t} \quad (2.240)$$

sînt tangente la curba (2.237) în punctele în care viteza este nulă (sau deplasarea este maximă), deci unde $\omega_n t = j\pi$, j fiind un număr întreg.

Expresia (2.239) se mai scrie

$$\ln y_1 = \ln \hat{x}_0 - \zeta \omega_n t, \quad (2.241)$$

care reprezentată grafic în coordonate semilogaritmice (fig. 2.96) este o dreaptă de pantă $(-\zeta \omega_n)$. Cunoscînd ω_n se poate calcula deci ζ [79]. O metodă cu totul analogă se poate dezvolta pe baza expresiei (2.238) dacă se măsoară viteza răspunsului [6].

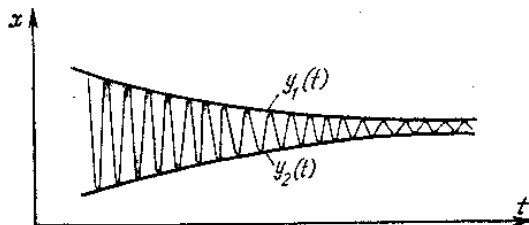


Fig. 2.95

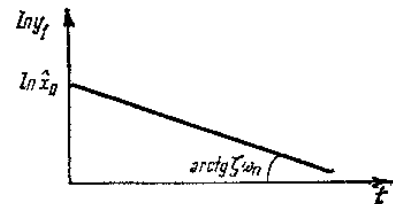


Fig. 2.96

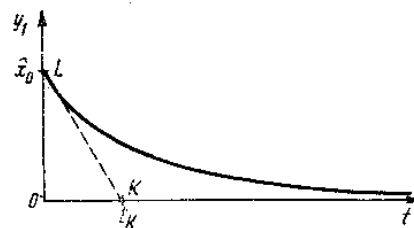


Fig. 2.97

Tangenta în punctul L la curba (2.239) intersectează axa timpului (fig. 2.97) în punctul K , de abscisă $t_K = \frac{1}{\zeta \omega_n}$, care se poate exprima ca multiplu de perioada vibrației T , $t_K = nT$, deci $\zeta = \frac{1}{2\pi n}$.

Dacă forma înregistrării funcției (2.236) este suficient de clară și se pot măsura două amplitudini succesive de același semn \hat{x}_1 și \hat{x}_2 , se

calculează decrementul logaritm.

$$\delta = \ln \frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2} = \zeta \omega_n T = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 2\pi\zeta. \quad (2.242)$$

Dacă se măsoară \hat{x}_0 , apoi amplitudinea \hat{x}_n după n cicluri de vibrație, decrementul logaritm

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{\hat{x}_0}{\hat{x}_n}. \quad (2.243)$$

Rezultă o nouă formulă de calcul a raportului de amortizare

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}. \quad (2.244)$$

Se poate da o interpretare mai generală relației (2.241), bazată pe considerente energetice.

Fie \hat{x}_n și \hat{x}_{n+1} două valori succesive și de același semn ale amplitudinii vibrației libere. În timpul ciclului dintre ele, se poate calcula o valoare *aproximativă* a energiei cinetice

$$W_c = \frac{1}{2} \omega^2 m \left(\frac{\hat{x}_n + \hat{x}_{n+1}}{2} \right)^2. \quad (2.245)$$

Energia disipată W_d este evident egală cu variația energiei cinetice

$$W_d = \frac{1}{2} m \omega^2 (\hat{x}_n^2 - \hat{x}_{n+1}^2). \quad (2.246)$$

Înlocuind în (2.222) se obține

$$\frac{1}{2} m \omega^2 (\hat{x}_n^2 - \hat{x}_{n+1}^2) = 4\pi\zeta \left(\frac{1}{2} m \omega^2 \right) \left(\frac{\hat{x}_n + \hat{x}_{n+1}}{2} \right)^2$$

de unde rezultă

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n \frac{1 - \pi\zeta}{1 + \pi\zeta} \quad (2.247)$$

și prin analogie

$$\hat{x}_n = \hat{x}_0 \left(\frac{1 - \pi\zeta}{1 + \pi\zeta} \right)^n. \quad (2.248)$$

În coordonate semilogaritmice

$$\log \hat{x}_n = \log \hat{x}_0 + n \log \frac{1 - \pi\zeta}{1 + \pi\zeta}. \quad (2.249)$$

Dezvoltînd în serie, pentru valori ζ mici,

$$\log \frac{1 - \pi\zeta}{1 + \pi\zeta} \cong - 2\pi\zeta.$$

Deci, cu o bună aproximație, relația (2.249) devine

$$\log \hat{x}_n = \log \hat{x}_0 - 2\pi n\zeta \quad (2.250)$$

deci o linie dreaptă, chiar dacă amortizarea nu este exclusiv viscoasă. În acest caz ζ este coeficientul de amortizare viscoasă echivalentă, în sensul definiției de la § 2.1.4.

2.6.4. Metoda autooscilațiilor

Dacă sistemul din figura 2.34 este acționat cu un vibrator electromagnetic, se poate folosi o legătură de reacție care să introducă în bobina vibratorului semnalul dat de un captor de viteze, atașat sistemului în punctul de excitație, și trecut printr-un amplificator de putere. Dacă în echipamentul electronic care comandă vibratorul nu apar defazaje, se poate face ca, printr-un reglaj adecvat al câștigului amplificatorului, sistemul să execute vibrații autoîntreținute la pulsația proprie ω_n .

Se introduce în ecuația (2.68) forța electromagnetică

$$f(t) = \Gamma_v \cdot i, \quad (2.251)$$

unde i este curentul în bobina vibratorului, iar Γ_v este forța produsă pe unitatea de intensitate a curentului.

Prin montaj, tensiunea la bornele bobinei de excitație este proporțională cu viteza în punctul de acționare a sistemului

$$e = C \dot{x} \quad (2.252)$$

Dar

$$e = iZ_v + \Gamma_c \dot{x}, \quad (2.253)$$

unde Z_v este impedanța bobinei, iar $\Gamma_c \dot{x}$ este tensiunea electromotoare indusă datorită mișcării bobinei.

Din relațiile (2.252) și (2.253) rezultă

$$i = \frac{(C - \Gamma_c)\dot{x}}{Z_v}$$

iar din relația (2.251) se deduce

$$f(t) = \Gamma_v \frac{C - \Gamma_c}{Z_v} \dot{x} = (C' - C'')\dot{x}, \quad (2.254)$$

unde constantele C' și C'' sînt reale dacă Z_v este reală.

Înlocuind expresia (2.254) în ecuația de mișcare (2.68), rezultă

$$m\ddot{x} + (c + C'' - C') \dot{x} + kx = 0. \quad (2.255)$$

Constanta C' este proporțională cu câștigul amplificatorului. Dacă se realizează condiția

$$C' = c + C'', \quad (2.256)$$

se anulează amortizarea din sistem.

Sistemul execută vibrații neamortizate cu pulsația ω_n . Coeficientul de amortizare viscoasă echivalentă se determină din ecuația (2.256)

$$c = C' - C''$$

în care C' și C'' depind de montaj și reglajul amplificatorului.

Aplicarea practică a metodei întîmpină dificultăți din cauza instabilității mișcării în cazul cînd C' devine incidental mai mare ca $c + C''$. Pentru stabilizarea amplitudinii mișcării se introduce în amplificator un element cu neliniaritate slabă care face ca realizarea condiției (2.256) să fie posibilă doar cînd viteza \dot{x} are o anumită valoare. Cînd \dot{x} scade sub această valoare, C' crește și invers.

Elemente de teoria vibrațiilor sistemelor liniare discrete

În acest capitol se face o prezentare succintă a principalelor rezultate ale teoriei vibrațiilor sistemelor cu mai multe grade de libertate, obținute folosind atât *analiza modală* cât și *analiza spectrală*. Se tratează numai cazul sistemelor liniare cu număr finit de grade de libertate, deoarece majoritatea metodelor de identificare a structurilor elastice se bazează pe modele discrete ale structurilor reale continue.

3.1. Vibrațiile sistemelor conservative

Studiul vibrațiilor sistemelor conservative prezintă interes atât pentru analiza structurilor cu amortizare neglijabilă (șasiuri, cadre, batiuri etc.) cât și pentru structuri cu amortizare „proporțională”, al căror răspuns poate fi exprimat în funcție de modurile proprii de vibrație ale sistemului conservativ asociat.

3.1.1. Vibrații libere

Ecuatiile vibrațiilor libere ale unui sistem conservativ cu N grade de libertate, exprimate în funcție de coordonatele independente q_1, q_2, \dots, q_N , se pot scrie sub forma

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}. \quad (3.1)$$

Matricea maselor $[M]$ și matricea constantelor elastice $[K]$ sînt definite pozitiv, nesingulare și de obicei simetrice (cînd coordonatele q_i definesc deplasări față de o poziție fixă în spațiu), iar $\{q\}$ este matricea coloană a coordonatelor generalizate.

Se caută o soluție de forma

$$\{q\} = \{\Psi\} \cos \omega t, \quad (3.2)$$

care reprezintă o vibrație armonică în care mișcările corespunzătoare celor N coordonate sînt sincrone și echifazice.

Înlocuind soluția (3.2) în (3.1), rezultă sistemul de ecuații

$$([K] - \omega^2[M])\{\Psi\} = \{0\}, \quad (3.3)$$

deci trebuie rezolvată problema de valori proprii asociată matricelor $[M]$ și $[K]$, care de obicei sînt matrice pătrate ($N \times N$).

Sistemul (3.3) are soluții nebanale numai dacă

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0. \quad (3.4)$$

Relația (3.4) este o ecuație algebrică de gradul N în ω^2 , numită *ecuația pulsațiilor*. Rădăcinile acesteia $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ (se consideră cazul cînd cele N valori sînt distincte) sînt toate reale și pozitive și se numesc *valori proprii*. Mărimile $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ se numesc *pulsații proprii*.

Fiecărei valori proprii ω_r^2 îi corespunde un *vector propriu* $\{\Psi^{(r)}\}$, format din elemente reale $\Psi_j^{(r)}$, care satisface ecuația

$$([K] - \omega_r^2[M])\{\Psi^{(r)}\} = \{0\} \quad (3.5)$$

și care definește forma unui *mod propriu de vibrație*.

Acești *vectori modali* sînt unici, în sensul că raportul între două elemente $\Psi_j^{(r)}$ și $\Psi_l^{(r)}$ este constant. În schimb, valoarea elementelor este arbitrară. Procesul de „ajustare” a elementelor vectorilor proprii pentru a face amplitudinea lor unică se numește *normalizare*, iar vectorii rezultați definesc forma *modurilor normale* de vibrație. Aceasta se face alegînd fie $\Psi_{\max}^{(r)} = 1$, fie $\{\Psi^{(r)}\}^T[M]\{\Psi^{(r)}\} = 1$, unde T indică transpunere. Alte moduri de normalizare a vectorilor modali sînt prezentate în capitolul 5.

Problema de valori proprii (3.5) se scrie

$$[M]^{-1}[K]\{\Psi^{(r)}\} = \omega_r^2\{\Psi^{(r)}\}, \quad (3.5, a)$$

sau

$$[K]^{-1}[M]\{\Psi^{(r)}\} = \frac{1}{\omega_r^2}\{\Psi^{(r)}\}. \quad (3.5, b)$$

Rezultă că vectorii proprii la dreapta ai matricii $[M]^{-1}[K]$ și vectorii proprii la dreapta ai matricii inverse $[K]^{-1}[M]$ sînt identici, iar valorile proprii corespunzătoare sînt inverse una alteia (datorită simetriei matricelor $[M]$ și $[K]$).

Între vectorii proprii $\{\Psi^{(r)}\}$ și matricele $[M]$ și $[K]$ se stabilesc următoarele relații de ortogonalitate

$$\{\Psi^{(s)}\}^T[M]\{\Psi^{(r)}\} = 0, \quad (r \neq s) \quad (3.6)$$

$$\{\Psi^{(s)}\}^T[K]\{\Psi^{(r)}\} = 0, \quad (r \neq s) \quad (3.7)$$

în care $[M]$ și $[K]$ joacă rolul de matrice de ponderare.

Dacă se notează

$$m_r = \{\Psi^{(r)}\}^T[M]\{\Psi^{(r)}\}, \quad (3.8)$$

$$k_r = \{\Psi^{(r)}\}^T[K]\{\Psi^{(r)}\}, \quad (3.9)$$

ecuația (3.5) devine

$$k_r - \omega_r^2 m_r = 0. \quad (3.10)$$

Rezultă

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} = \frac{\{\Psi^{(r)}\}^T [K] \{\Psi^{(r)}\}}{\{\Psi^{(r)}\}^T [M] \{\Psi^{(r)}\}} \quad (3.11)$$

unde k_r este *constantă elastică generalizată* a modului r (*constantă elastică modală*), iar m_r este *masa generalizată* a modului r (*masa modală*).

Se introduce o matrice pătrată, avînd vectorii proprii drept coloane

$$[\Psi] = [\{\Psi^{(1)}\} \{\Psi^{(2)}\} \dots \{\Psi^{(r)}\} \dots \{\Psi^{(N)}\}], \quad (3.12)$$

numită *matricea modală*.

Dacă valorile proprii se aranjează într-o matrice diagonală

$$[\omega_r^2] = \text{diag} [\omega_r^2], \quad (3.13)$$

numită *matricea spectrală*, cele N ecuații (3.5) se scriu sub forma

$$[K][\Psi] - [M][\Psi][\omega_r^2] = [0]. \quad (3.14)$$

3.1.2. Vibrații forțate

Ecuațiile vibrațiilor forțate ale sistemului conservativ cu N grade de libertate se pot scrie sub forma

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}, \quad (3.15)$$

unde $\{f\}$ este vectorul excitației.

În vederea decuplării ecuațiilor (3.15), în care de obicei matricele $[M]$ și $[K]$ nu sînt simultan diagonale, se folosește transformarea liniară

$$\{q\} = [\Psi]\{p\}, \quad (3.16)$$

care se mai scrie sub forma

$$\{q\} = \sum_{r=1}^N \{\Psi^{(r)}\} p_r. \quad (3.16, a)$$

Aceasta introduce *coordonatele principale neamortizate* p_r și exprimă vectorul $\{q\}$ ca o combinație liniară între vectorii proprii $\{\Psi^{(r)}\}$.

Înlocuind (3.16) în (3.15) și înmulțind la stînga cu $[\Psi]^T$, rezultă

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] \{\ddot{p}\} + [\Psi]^T [K] [\Psi] \{p\} = [\Psi]^T \{f\}. \quad (3.17)$$

Ecuația corespunzătoare coordonatei principale p_r se obține înlocuind (3.16, a) în (3.15) și aplicînd relațiile de ortogonalitate (3.6) și (3.7):

$$\{\Psi^{(r)}\}^T [M] \{\Psi^{(r)}\} \ddot{p}_r + \{\Psi^{(r)}\}^T [K] \{\Psi^{(r)}\} p_r = \{\Psi^{(r)}\}^T \{f\}. \quad (3.18)$$

Folosind relațiile (3.8) și (3.9), ecuația (3.18) devine

$$m_r \ddot{p}_r + k_r p_r = F_r, \quad (3.19)$$

unde s-a notat cu F_r — forța generalizată (*forța modală*) corespunzătoare modului r

$$F_r = \{\Psi^{(r)}\}^T \{f\}. \quad (3.20)$$

Rezultă că dacă se introduce matricea diagonală a maselor modale

$$[m] = [\Psi]^T [M] [\Psi] = \text{diag } [m_r], \quad (3.21)$$

matricea diagonală a constantelor elastice modale

$$[k] = [\Psi]^T [K] [\Psi] = \text{diag } [k_r] \quad (3.22)$$

și vectorul forțelor modale

$$\{F\} = [\Psi]^T \{f\}, \quad (3.23)$$

sistemul (3.17) devine

$$[m]\{\ddot{p}\} + [k]\{p\} = \{F\}, \quad (3.17,a)$$

fiind format din N ecuații decuplate (3.19), care se rezolvă la fel ca ecuația sistemului cu un grad de libertate.

În cazul excitației armonice $\{f\} = \{\hat{f}\}e^{i\omega t}$, soluția staționară are forma $\{q\} = \{\hat{q}\}e^{i\omega t}$, deci se folosește transformarea

$$\{\hat{q}\} = [\Psi]\{\hat{p}\} = \sum_{r=1}^N \{\Psi^{(r)}\}\hat{p}_r.$$

Rezultă

$$\hat{p}_r = \frac{\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\}}{k_r - \omega^2 m_r},$$

deci

$$\{\hat{q}\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{\Psi^{(r)}\}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)}. \quad (3.24)$$

Deși modurile proprii de vibrație $\{\Psi^{(r)}\}$ ale unui sistem conservativ pot exista în absența oricărei solicitări exterioare, este posibil să li se atașeze câte un *mod propriu de solicitare*, denumit *mod principal de excitație* sau *mod principal de solicitare*.

Prin definiție, un mod principal de solicitare definește distribuția de forțe capabilă să întrețină vibrația în modul propriu corespunzător, la pulsații diferite de pulsația proprie.

Dacă excitația $\{f\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}e^{i\omega t}$ produce răspunsul $\{q\} = \{\Psi^{(r)}\}e^{i\omega t}$, din relația (3.16, a) rezultă $\{p\} = \{I\}_r e^{i\omega t}$, unde $\{I\}_r$ este coloana r a matricei unitate $[I]$, iar ecuația (3.15) devine

$$\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = [K - \omega^2 M]\{\Psi^{(r)}\}, \quad (3.25)$$

definind modul principal de solicitare de ordinul r .

Înmulțind în ecuația (3.25) la stînga cu $\{\Psi^{(s)}\}^T$, conform relațiilor de ortogonalitate (3.6) și (3.7), rezultă

$$\{\Psi^{(s)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = 0,$$

deci lucrul mecanic efectuat de forțele dintr-un mod principal de solicitare, pe deplasările din alte moduri de vibrație, este egal cu zero.

Analog, pe baza relațiilor (3.8) și (3.9) se obține

$$\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = k_r - \omega^2 m_r = k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)$$

care pentru $\omega \neq \omega_r$ este diferit de zero.

3.2. Vibrațiile sistemelor amortizate

3.2.1. Ipoteze asupra amortizării

Ecuațiile vibrațiilor forțate ale unui sistem cu amortizare viscoasă liniară se pot scrie sub forma

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}, \quad (3.26)$$

unde $[C]$ este matricea coeficienților de amortizare viscoasă, denumită prescurtat *matricea amortizării*. Se va considera că $[C]$ este reală, simetrică și definită pozitiv.

Transformarea de coordonate (3.16) și înmulțirea la stînga cu $[\Psi]^T$ conduce la sistemul

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] \{\ddot{p}\} + [\Psi]^T [C] [\Psi] \{\dot{p}\} + [\Psi]^T [K] [\Psi] \{p\} = [\Psi]^T \{f\}. \quad (3.27)$$

Folosind notațiile (3.21) — (3.23) și

$$[c] = [\Psi]^T [C] [\Psi], \quad (3.28)$$

sistemul (3.27) devine

$$[m]\{\ddot{p}\} + [c]\{\dot{p}\} + [k]\{p\} = \{F\}. \quad (3.29)$$

Dacă matricea $[c]$ nu este diagonală, amortizarea viscoasă se numește neproporțională (neortogonală sau neclasică).

Prima ecuație diferențială a sistemului (3.29) se scrie

$$m_1 \ddot{p}_1 + c_{11} \dot{p}_1 + \sum_{r=2}^N c_{1r} \dot{p}_r + k_1 p_1 = F_1. \quad (3.30)$$

Termenul al treilea din membrul stîng indică cuplarea între modurile de vibrație datorită amortizării. În acest caz se pot defini pulsații proprii complexe și forme proprii complexe, după cum se arată în § 3.2.4.

Dacă matricea $[c]$ este diagonală, amortizarea viscoasă se numește proporțională (ortogonală sau clasică).

În acest caz, cu notația

$$[c] = \text{diag } [c_r], \quad (3.31)$$

sistemul (3.29) devine

$$[m]\{\ddot{p}\} + [c]\{\dot{p}\} + [k]\{p\} = \{F\}, \quad (3.32)$$

deci modurile de vibrație se decuplează; prima ecuație a sistemului (3.32) are forma

$$m_1\ddot{p}_1 + c_1\dot{p}_1 + k_1p_1 = F_1, \quad (3.33)$$

putînd fi rezolvată independent de celelalte [5].

Denumirea de *amortizare proporțională* provine de la o observație a lui Rayleigh [100], care transpusă matriceal se exprimă astfel: Dacă

$$[C] = \sigma[M] + \tau[K], \quad (3.34)$$

unde σ și τ sînt factori de proporționalitate, atunci matricea $[\Psi]^T[C][\Psi]$ este diagonală. Într-adevăr

$$\begin{aligned} [\Psi]^T[C][\Psi] &= \sigma[\Psi]^T[M][\Psi] + \tau[\Psi]^T[K][\Psi] = \\ &= \sigma[m] + \tau[k] = [c]. \end{aligned}$$

Amortizarea proporțională nu trebuie însă limitată la o combinație liniară a matricelor masei și rigidității. S-a demonstrat [21], [22], [37] că dacă matricea amortizării poate fi exprimată ca o funcție polinomială de $[M]$ și/sau $[K]$, atunci matricea modală $[\Psi]$ diagonalizează matricea $[C]$ la fel ca matricele $[M]$ și $[K]$, cu condiția ca aceasta să fie ortogonală $[\Psi]^T[\Psi] = [I]$.

Condiția (necesară și suficientă) cea mai generală pentru decuplarea ecuațiilor (3.26) prin transformarea (3.16) este [22]

$$[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C].$$

În practică, alegerea ipotezei amortizării proporționale nu se face verificînd respectarea unei condiții atît de complicate, ci simplu considerînd neglijabili termenii nediagonali ai matricei amortizării, deci neglijînd cuplajele intermodale produse de amortizări.

3.2.2. Moduri reale „clasice” de vibrație

Dacă matricea amortizării este diagonalizată de aceeași transformare care decuplează sistemul (3.1), răspunsul unui sistem amortizat se poate exprima în funcție de modurile de vibrație $\{\Psi^{(r)}\}$ ale sistemului neamortizat asociat, numite *moduri reale „clasice” de vibrație*.

3.2.2.1. Amortizare viscoasă

În cazul amortizării viscoase proporționale, se stabilește următoarea relație de ortogonalitate

$$\{\Psi^{(s)}\}^T[C]\{\Psi^{(r)}\} = 0, \quad (r \neq s) \quad (3.35)$$

și se notează

$$\{\Psi^{(r)}\}^T [C] \{\Psi^{(r)}\} = c_r, \quad (3.36)$$

unde c_r este coeficientul de amortizare viscoasă modală.

În regim armonic staționar, dacă

$$\{f\} = \{\hat{f}\} e^{i\omega t}, \quad \{q\} = \{\hat{q}\} e^{i\omega t}, \quad (3.37)$$

ecuația (3.26) devine

$$(-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]) \{\hat{q}\} = \{\hat{f}\}. \quad (3.38)$$

Transformarea de coordonate

$$\{\hat{q}\} = \sum_{r=1}^N \{\Psi^{(r)}\} \tilde{p}_r \quad (3.39)$$

și folosirea relațiilor (3.6) – (3.10), (3.35) și (3.36) duce la determinarea coordonatei principale complexe

$$\tilde{p}_r = \frac{\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\}}{m_r(-\omega^2 + i2\zeta_r\omega\omega_r + \omega_r^2)}, \quad (3.40)$$

unde

$$\zeta_r = \frac{c_r}{2m_r\omega_r} \quad (3.41)$$

este raportul de amortizare corespunzător modului r .

Rezultă

$$\{\hat{q}\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{\Psi^{(r)}\}}{m_r(-\omega^2 + i2\zeta_r\omega\omega_r + \omega_r^2)}. \quad (3.42)$$

3.2.2.2. Amortizare histeretică

Ecuațiile vibrațiilor forțate ale unui sistem liniar cu amortizare histeretică se pot scrie sub forma

$$[M]\{\ddot{q}\} + \frac{1}{\omega} [H]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}, \quad (3.43)$$

unde $[H]$ este matricea coeficienților de amortizare histeretică (reală, pozitiv definită și simetrică).

În cazul amortizării histeretice proporționale, se poate stabili relația de ortogonalitate

$$\{\Psi^{(s)}\}^T [H] \{\Psi^{(r)}\} = 0. \quad (r \neq s) \quad (3.44)$$

Se notează prin

$$\{\Psi^{(r)}\}^T [H] \{\Psi^{(r)}\} = h_r \quad (3.45)$$

coeficientul de amortizare histeretică corespunzător modului r .

Pentru o excitație armonică*

$$\{f\} = \{\hat{f}\} e^{i\omega t}, \quad (3.46)$$

deplasarea în regim staționar este

$$\{q\} = \{\hat{q}\} e^{i\omega t}, \quad (3.47)$$

deci sistemul (3.43) devine

$$(-\omega^2[M] + i[H] + [K])\{\hat{q}\} = \{\hat{f}\}. \quad (3.48)$$

Transformarea (3.39)

$$\{\hat{q}\} = [\Psi]\{\hat{p}\} = \sum_{r=1}^N \{\Psi^{(r)}\} \tilde{p}_r$$

decuplează sistemul de ecuații (3.48), care devine

$$(-\omega^2[m] + i[h] + [k])\{\hat{p}\} = [\Psi]^T \{\hat{f}\} = \{\hat{F}\} \quad (3.49)$$

unde

$$[h] = \text{diag } [h_r]. \quad (3.50)$$

Ecuația r a acestui sistem se scrie

$$(k_r - \omega^2 m_r + i h_r) \tilde{p}_r = \hat{F}_{r1} \quad (3.51)$$

deci coordonata modală complexă \tilde{p}_r este

$$\tilde{p}_r = \frac{\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\}}{k_r - \omega^2 m_r + i h_r}. \quad (3.52)$$

Rezultă vectorul amplitudinilor complexe ale deplasărilor

$$\{\hat{q}\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{\Psi^{(r)}\}}{k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + i g_r\right)}, \quad (3.53)$$

unde

$$g_r = \frac{h_r}{k_r} \quad (3.54)$$

este *factorul de amortizare histeretică* corespunzător modului r .

* Modelul amortizării histeretice (și deci ecuația (3.43)) este valabil numai în acest caz.

În cazul metodelor de identificare cu excitație într-un punct, interesează răspunsul „pe direcția” coordonatei q_j produs de o forță armonică aplicată la coordonata q_i . Din expresia (3.53) se obține

$$\tilde{q}_j = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_i^{(r)} \hat{f}_i \Psi_j^{(r)}}{k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + ig_r\right)} = \sum_{r=1}^N \frac{\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tilde{p}_r} \hat{f}_i \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial \tilde{p}_r}}{k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + ig_r\right)}. \quad (3.55)$$

Rezultă receptanța (de transfer) complexă

$$\bar{\alpha}_{ji} = \frac{\tilde{q}_j}{\hat{f}_i} = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_i^{(r)} \Psi_j^{(r)}}{k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + ig_r\right)} = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_i^{(r)} \Psi_j^{(r)}}{k_r g_r} \sin \psi_r e^{-i\psi_r} \quad (3.56)$$

unde

$$\psi_r = \arctg \frac{g_r}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}. \quad (3.57)$$

La același rezultat se ajunge folosind metoda răspunsului în frecvență. Ecuația (3.48) se mai scrie

$$[\beta]\{\tilde{q}\} = \{\hat{f}\}, \quad (3.48, a)$$

unde

$$[\beta] = [-\omega^2[M] + i[H] + [K]] \quad (3.58)$$

este matricea obstructanțelor (constantelor elastice dinamice) complexe.

Matricea receptanțelor (coeficienților de influență dinamici) complexe este

$$[\bar{\alpha}] = [\beta]^{-1} = [-\omega^2[M] + i[H] + [K]]^{-1}, \quad (3.59)$$

avînd elemente de forma

$$\bar{\alpha}_{ji} = \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial \hat{f}_i}. \quad (3.60)$$

Aplicînd transformarea de coordonate (3.39), ecuația (3.48,a) devine

$$[\beta][\Psi]\{\tilde{p}\} = \{\hat{f}\}. \quad (3.61)$$

După înmulțire la stînga cu $[\Psi]^T$ se obține sistemul decuplat

$$[\beta_r]\{\tilde{p}\} = [\Psi]^T\{\hat{f}\}, \quad (3.62)$$

unde

$$[\tilde{\beta}_r] = [\Psi]^T [\beta] [\Psi] = -\omega^2 [m] + i[h] + [k] = \text{diag} [\tilde{\beta}_r] \quad (3.63)$$

iar *obstructanța modală complexă* este

$$\tilde{\beta}_r = k_r - \omega^2 m_r + ih_r. \quad (3.64)$$

Se definește *receptanța modală complexă*

$$\bar{\alpha}_r = \frac{1}{\tilde{\beta}_r} = \frac{1}{k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + ig_r\right)} = \frac{\sin \psi_r \cdot e^{-i\psi_r}}{h_r} \quad (3.65)$$

și matricea diagonală corespunzătoare

$$[\bar{\alpha}_r] = \text{diag} [\bar{\alpha}_r] = [\tilde{\beta}_r]^{-1}. \quad (3.66)$$

Prin inversarea relației (3.63) se obține

$$[\tilde{\beta}_r]^{-1} = [\Psi]^{-1} [\beta]^{-1} [\Psi]^{-T} \quad (3.67)$$

sau, cu notațiile (3.59) și (3.66),

$$[\bar{\alpha}_r] = [\Psi]^{-1} [\bar{\alpha}] [\Psi]^{-T}, \quad (3.68)$$

care prin înmulțire la stînga cu $[\Psi]$ și la dreapta cu $[\Psi]^T$ devine

$$[\Psi] [\bar{\alpha}_r] [\Psi]^T = [\bar{\alpha}]. \quad (3.69)$$

Coloana l a matricei $[\bar{\alpha}]$ reprezintă vectorul răspunsului la o forță aplicată la coordonata l

$$\{\bar{\alpha}\}_l = [\Psi] [\bar{\alpha}_r] \{\Psi\}_l = [\Psi] \{\bar{\alpha}_r \Psi_l\}, \quad (3.70)$$

unde $\{\Psi\}_l$ este un vector care conține elementul l al fiecărui mod propriu. Rezultă

$$\bar{\alpha}_{li} = \sum_{r=1}^N \Psi_l^{(r)} \Psi_j^{(r)} \bar{\alpha}_{rr}, \quad (3.71)$$

expresie identică cu (3.56).

În vederea simplificării expunerii metodelor de identificare prezentate în Capitolul 5, se notează

$$a_r(\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + g_r^2}, \quad b_r(\omega) = \frac{-g_r}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + g_r^2}, \quad (3.72)$$

$$A_r(\omega) = g_r \cdot a_r(\omega), \quad B_r(\omega) = g_r \cdot b_r(\omega), \quad (3.73)$$

$$\chi_{ji}^{(r)} = \frac{\Psi_i^{(r)} \Psi_j^{(r)}}{k_r g_r}, \quad (3.74)$$

$$\kappa_{ji}^{(r)} = \frac{\Psi_i^{(r)} \Psi_j^{(r)}}{k_r}. \quad (3.75)$$

Dacă se separă părțile reale și imaginare ale receptanțelor complexe, expresia (3.56) se poate scrie

$$\bar{\alpha}_{ji}(\omega) = \alpha_{jI_R}(\omega) + i\alpha_{jI_I}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_i^{(r)}\Psi_j^{(r)}}{k_r} [a_r(\omega) + ib_r(\omega)], \quad (3.76)$$

deci

$$\alpha_{jI_R}(\omega) = \sum_{r=1}^N x_{ji}^{(r)} a_r(\omega) = \sum_{r=1}^N \chi_{ji}^{(r)} A_r(\omega), \quad (3.77)$$

$$\alpha_{jI_I}(\omega) = \sum_{r=1}^N x_{ji}^{(r)} b_r(\omega) = \sum_{r=1}^N \chi_{ji}^{(r)} B_r(\omega). \quad (3.78)$$

Cu ajutorul acestora se formează matricele coloană

$$\{\alpha_{I_R}(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \{x_i^{(r)}\} a_r(\omega) = [x]\{a(\omega)\} = [X]\{A(\omega)\}, \quad (3.79)$$

$$\{\alpha_{I_I}(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \{x_i^{(r)}\} b_r(\omega) = [x]\{b(\omega)\} = [X]\{B(\omega)\}, \quad (3.80)$$

unde

$$[x] = [\{x_i^{(1)}\} \{x_i^{(2)}\} \dots \{x_i^{(N)}\}] = \\ = \left[\{\Psi^{(1)}\} \frac{\Psi_i^{(1)}}{k_1} \quad \{\Psi^{(2)}\} \frac{\Psi_i^{(2)}}{k_2} \quad \dots \quad \{\Psi^{(N)}\} \frac{\Psi_i^{(N)}}{k_N} \right], \quad (3.81)$$

$$\{a(\omega)\} = \{a_1(\omega) \quad a_2(\omega) \quad \dots \quad a_N(\omega)\}^T, \quad (3.82)$$

$$\{b(\omega)\} = \{b_1(\omega) \quad b_2(\omega) \quad \dots \quad b_N(\omega)\}^T,$$

$$\{\alpha_{I_R}(\omega)\} = \{\alpha_{1I_R} \quad \alpha_{2I_R} \quad \dots \quad \alpha_{jI_R} \quad \dots \quad \alpha_{NI_R}\}^T, \quad (3.83)$$

$$\{\alpha_{I_I}(\omega)\} = \{\alpha_{1I_I} \quad \alpha_{2I_I} \quad \dots \quad \alpha_{jI_I} \quad \dots \quad \alpha_{NI_I}\}^T,$$

$$[X] = [\{\chi_i^{(1)}\} \{\chi_i^{(2)}\} \dots \{\chi_i^{(N)}\}], \quad (3.84)$$

$$\{A(\omega)\} = \{A_1(\omega) \quad A_2(\omega) \quad \dots \quad A_N(\omega)\}^T, \quad (3.85)$$

$$\{B(\omega)\} = \{B_1(\omega) \quad B_2(\omega) \quad \dots \quad B_N(\omega)\}^T.$$

3.2.3. Moduri reale forțate de vibrație

(Moduri de distorsiune)

Ecuatiile vibrațiilor forțate ale unui sistem cu amortizare viscoasă și histeretică se scriu sub forma

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + \frac{1}{\omega} [H]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}. \quad (3.86)$$

În cazul excitației armonice

$$\{f\} = \{\hat{f}\} e^{i\omega t}, \quad \{q\} = \{\hat{q}\} e^{i\omega t}. \quad (3.87)$$

Se cercetează dacă există o matrice coloană $\{\hat{f}\}$ cu elemente reale, care să definească un mod de excitație cu forțe în fază, astfel încât la orice pulsație ω deplasările q_r să fie toate în fază, deși nu neapărat în fază cu forțele. Matricea $\{\hat{q}\}$ va fi de forma

$$\{\hat{q}\} = \{\hat{q}\} e^{-i\varphi}, \quad (3.88)$$

unde φ este defazajul între forțe și deplasări, iar matricea $\{\hat{q}\}$ are elemente reale.

Înlocuind (3.87) și (3.88) în ecuația (3.86), se obține

$$([K - \omega^2 M] + i[H + \omega C])(\cos \varphi - i \sin \varphi)\{\hat{q}\} = \{\hat{f}\}. \quad (3.89)$$

Separînd termenii în fază și cei în cvadratură, rezultă

$$([H + \omega C] \cos \varphi - [K - \omega^2 M] \sin \varphi)\{\hat{q}\} = \{0\}, \quad (3.90)$$

$$([H + \omega C] \sin \varphi + [K - \omega^2 M] \cos \varphi)\{\hat{q}\} = \{\hat{f}\}. \quad (3.91)$$

Dacă $\cos \varphi \neq 0$, ecuația (3.90) devine

$$([H + \omega C] - [K - \omega^2 M] \operatorname{tg} \varphi)\{\hat{q}\} = \{0\}, \quad (3.92)$$

reprezentînd un sistem de ecuații omogene, care are soluții nebanale dacă

$$\det (\operatorname{tg} \varphi [K - M\omega^2] - [H + \omega C]) = 0. \quad (3.93)$$

Aceasta este o problemă de rădăcini latente ale unui fascicol de matrice [66], în care rădăcinile latente sînt $\operatorname{tg} \varphi$. Relația (3.93) este o ecuație algebrică de ordinul N în $\operatorname{tg} \varphi$. Fiecărei rădăcini (reale) $\operatorname{tg} \varphi_r$ îi corespunde un vector modal (real) $\{\Phi^{(r)}\}$ care satisface ecuația

$$(\operatorname{tg} \varphi_r [K - M\omega^2] - [H + \omega C])\{\Phi^{(r)}\} = \{0\}. \quad (3.94)$$

Vectorul corespunzător al excitației $\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}$ se obține din (3.91)

$$\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = \cos \varphi_r [K - \omega^2 M]\{\Phi^{(r)}\} + \sin \varphi_r [H + \omega C]\{\Phi^{(r)}\} \quad (3.95)$$

sau una din următoarele relații

$$[K - \omega^2 M]\{\Phi^{(r)}\} = \cos \varphi_r \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}, \quad (3.96)$$

$$[H + \omega C]\{\Phi^{(r)}\} = \sin \varphi_r \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}. \quad (3.97)$$

Rezultă că soluția (3.88) este posibilă. Există deci N moduri reale de vibrație $\{\Phi^{(r)}\}$ denumite *moduri de distorsiune*, *moduri echifazice* sau *moduri forțate de vibrație* [120]. Acestea diferă de *modurile principale de vibrație* $\{\Psi^{(r)}\}$ ale sistemului neamortizat, prin aceea că atât forma cât și defazajul φ_r variază cu pulsația ω . Ele sînt definite pentru cazul vibrațiilor forțate ale unui sistem cu amortizare neproportională, în timp ce modurile proprii $\{\Psi^{(r)}\}$ sînt definite pentru cazul vibrațiilor libere ale sistemului conservativ asociat, fiind caracteristice structurii și independente de excitație.

Vectorii corespunzători ai excitației $\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}$ se numesc *moduri forțate de solicitare* [120].

Din ecuația (3.94) rezultă

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{\{\Phi^{(r)}\}^T [H + \omega C] \{\Phi^{(r)}\}}{\{\Phi^{(r)}\}^T [K - \omega^2 M] \{\Phi^{(r)}\}}. \quad (3.98)$$

Se demonstrează [121] că φ_r variază continuu (cu pulsația ω) de la o valoare pozitivă mică (la $\omega = 0$), tinzînd către 180° pentru pulsații înalte.

Cînd $\varphi_r = 90^\circ$, $\cos \varphi_r = 0$, iar ecuația (3.90) devine

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\hat{q}\} = \{0\}, \quad (3.99)$$

identică cu (3.3), conducînd deci la problema de valori proprii a sistemului conservativ asociat

$$([K] - \omega_r^2 [M]) \{\Psi^{(r)}\} = \{0\}.$$

Rezultă că dacă $\omega = \omega_r$, atunci $\varphi_r = 90^\circ$, iar modul de distorsiune $\{\Phi^{(r)}\}$ ia forma modului principal $\{\Psi^{(r)}\}$ al sistemului neamortizat.

Celelalte $(N-1)$ moduri de distorsiune, corespunzătoare celorlalte $(N-1)$ rădăcini $\operatorname{tg} \varphi_r$ ale ecuației (3.93), se comportă similar. De exemplu, forma modului $\{\Phi^{(s)}\}$ variază cu ω . Atunci cînd $\omega = \omega_s$ se obține $\cos \varphi_s = 0$, $\varphi_s = \frac{\pi}{2}$ și $\{\Phi^{(s)}\} \equiv \{\Psi^{(s)}\}$. Deci $\varphi_s(\omega)$ este *defazajul caracteristic* care are

valoarea $\frac{\pi}{2}$ cînd $\omega = \omega_s$.

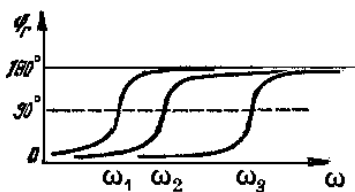


Fig. 3.1

Variația cu pulsația a defazajelor caracteristice este ilustrată în figura 3.1.

Între vectorii modurilor de distorsiune $\{\Phi^{(r)}\}$ se stabilesc următoarele relații de ortogonalitate

$$\{\Phi^{(r)}\}^T [K - \omega^2 M] \{\Phi^{(s)}\} = 0, \quad (r \neq s) \quad (3.100)$$

$$\{\Phi^{(r)}\}^T [H + \omega C] \{\Phi^{(s)}\} = 0, \quad (r \neq s) \quad (3.101)$$

Înmulțind ecuația (3.95) la stînga cu $\{\Phi^{(s)}\}^T$ și folosind relațiile de ortogonalitate se obține

$$\{\Phi^{(s)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = \{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(s)}\} = 0, \quad (r \neq s) \quad (3.102)$$

deci un mod forțat de solicitare $\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}$ introduce energie în sistem doar pe modul de distorsiune $\{\Phi^{(r)}\}$ corespunzător. Energia disipată pe un ciclu de vibrație este în acest caz

$$W_r = \pi \sin \varphi_r \{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = \pi \{\Phi^{(r)}\}^T [H + \omega C] \{\Phi^{(r)}\}. \quad (3.103)$$

Se formează o matrice pătrată avînd modurile de distorsiune drept coloane

$$[\Phi] = [\{\Phi^{(1)}\} \{\Phi^{(2)}\} \dots \{\Phi^{(N)}\}]. \quad (3.104)$$

De asemenea, se folosește transformarea

$$\{q\} = [\Phi] \{v\} = \sum_{r=1}^N \{\Phi^{(r)}\} v_r \quad (3.105)$$

prin care se introduce *coordonatele principale amortizate* v_r [13].

Înlocuind (3.105) în (3.86) și înmulțind la stînga cu $[\Phi]^T$ rezultă

$$[\bar{m}] \{\ddot{v}\} + \frac{1}{\omega} [\bar{d}] \{\dot{v}\} + [\bar{k}] \{v\} = [\Phi]^T \{f\}, \quad (3.106)$$

unde s-a notat

$$[\bar{m}] = [\Phi]^T [M] [\Phi],$$

$$\frac{1}{\omega} [\bar{d}] = [\Phi]^T \left[C + \frac{1}{\omega} H \right] [\Phi], \quad (3.107)$$

$$[\bar{k}] = [\Phi]^T [K] [\Phi].$$

În general, matricele $[\bar{m}]$ și $[\bar{k}]$ nu sînt diagonale, dar conform relațiilor de ortogonalitate (3.100) și (3.101), următoarele matrice sînt diagonale [13]:

$$[[\bar{k}] - \omega^2 [\bar{m}]] = \text{diag} [\bar{k}_r], \quad (3.108)$$

$$[\bar{d}] = \text{diag} [\bar{d}_r]. \quad (3.109)$$

Ecuația corespunzătoare coordonatei v_r este

$$\begin{aligned} \{\Phi^{(r)}\}^T [M] \{\Phi^{(r)}\} \ddot{v}_r + \frac{1}{\omega} \{\Phi^{(r)}\}^T [\omega C + H] \{\Phi^{(r)}\} \dot{v}_r + \\ + \{\Phi^{(r)}\}^T [K] \{\Phi^{(r)}\} v_r = \{\Phi^{(r)}\}^T \{f\}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

În cazul regimului armonic staționar

$$\{f\} = \{\hat{f}\} e^{i\omega t}, \quad \{v\} = \{\tilde{v}\} e^{i\omega t}, \quad (3.111)$$

care înlocuite în ecuația (3.110) duc la

$$\tilde{v}_r = \frac{\{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\}}{\{\Phi^{(r)}\}^T [K - \omega^2 M] \{\Phi^{(r)}\} + i \{\Phi^{(r)}\}^T [\omega C + H] \{\Phi^{(r)}\}} \quad (3.112)$$

sau, conform relațiilor (3.108) și (3.109),

$$\tilde{v}_r = \frac{\{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\}}{\bar{k}_r + i \bar{d}_r}, \quad (3.113)$$

deci soluția ecuației (3.86) este

$$\{\tilde{q}\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{\Phi^{(r)}\}}{\bar{k}_r + i \bar{d}_r}. \quad (3.114)$$

Cu notațiile (3.108) și (3.109), relația (3.98) se scrie

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{\bar{d}_r}{\bar{k}_r}. \quad (3.115)$$

În acest caz, receptanța modală complexă are expresia

$$\bar{\alpha}_r = \frac{1}{\bar{k}_r + i \bar{d}_r} = \frac{1}{\bar{d}_r} \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_r} + i} = \frac{\sin \varphi_r \cdot e^{-i\varphi_r}}{\bar{d}_r}. \quad (3.116)$$

Cu notația (3.116), relația (3.114) se mai scrie

$$\{\tilde{q}\} = \sum_{r=1}^N \bar{\alpha}_r \{\Phi^{(r)}\} \{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\}, \quad (3.117)$$

unde produsele diadice $\{\Phi^{(r)}\} \{\Phi^{(r)}\}^T$ sînt matrice pătrate de ordinul N și rang unu, de forma

$$\{\Phi^{(r)}\} \{\Phi^{(r)}\}^T = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(r)} \Phi_1^{(r)} & \Phi_1^{(r)} \Phi_2^{(r)} & \dots & \Phi_1^{(r)} \Phi_N^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_N^{(r)} \Phi_1^{(r)} & \Phi_N^{(r)} \Phi_2^{(r)} & \dots & \Phi_N^{(r)} \Phi_N^{(r)} \end{bmatrix}. \quad (3.118)$$

La același rezultat se ajunge dacă se exprimă vectorul excitației $\{\hat{f}\}$ ca o combinație liniară a vectorilor $\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}$, care se demonstrează că sînt liniar independenți [13].

Deoarece excitația $\{\hat{f}\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}$ produce răspunsul $\{\tilde{q}\} = \{\Phi^{(r)}\} e^{-i\varphi_r}$, rezultă că o excitație de forma

$$\{\hat{f}\} = \sum_{r=1}^N \lambda_r \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} \quad (3.119)$$

produce un răspuns

$$\{\bar{q}\} = \sum_{r=1}^N \lambda_r \{\Phi^{(r)}\} e^{-i\varphi_r}, \quad (3.120)$$

unde λ_r sînt coeficienți reali.

Înmulțind în relația (3.119) la stînga cu $\{\Phi^{(r)}\}^T$ și folosind (3.102) rezultă

$$\lambda_r = \frac{\{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\}}{\{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}} \quad (3.121)$$

sau, utilizînd relația (3.97),

$$\lambda_r = \frac{\{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \sin \varphi_r}{\{\Phi^{(r)}\}^T [H + \omega C] \{\Phi^{(r)}\}}. \quad (3.122)$$

Înlocuind (3.122) în (3.120) se obține relația (3.117)

$$\{\bar{q}\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Phi^{(r)}\} \{\Phi^{(r)}\}^T \sin \varphi_r e^{-i\varphi_r}}{\{\Phi^{(r)}\}^T [H + \omega C] \{\Phi^{(r)}\}} \{\hat{f}\}. \quad (3.123)$$

Receptanța complexă corespunzătoare răspunsului în coordonata q_j , cînd solicitarea se aplică coordonatei q_i , este

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{ji} &= \frac{\bar{q}_j}{\hat{f}_i} = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_i^{(r)} \Phi_j^{(r)} e^{-i\varphi_r} \sin \varphi_r}{\{\Phi^{(r)}\}^T [H + \omega C] \{\Phi^{(r)}\}} = \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_i^{(r)} \Phi_j^{(r)} e^{-i\varphi_r}}{\sqrt{(\{\Phi^{(r)}\}^T [H + \omega C] \{\Phi^{(r)}\})^2 + (\{\Phi^{(r)}\}^T [K - \omega^2 M] \{\Phi^{(r)}\})^2}}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Se introduc notațiile

$$\frac{\{\Phi^{(r)}\}^T [H + \omega C] \{\Phi^{(r)}\}}{\{\Phi^{(r)}\}^T [K] \{\Phi^{(r)}\}} = \gamma_r, \quad (3.125)$$

$$\frac{\{\Phi^{(r)}\}^T [K] \{\Phi^{(r)}\}}{\{\Phi^{(r)}\}^T [M] \{\Phi^{(r)}\}} = \Omega_r^2 \quad (3.126)$$

și se normalizează modurile de distorsiune considerînd aceeași „masă modală”

$$\{\Phi^{(r)}\}^T [M] \{\Phi^{(r)}\} = \mu. \quad (3.127)$$

Dacă se notează

$$\{\bar{q}\} = \{q_R\} - i\{q_I\} = [\bar{\alpha}] \{\hat{f}\} = [\alpha_R - i\alpha_I] \{\hat{f}\}, \quad (3.128)$$

conform relațiilor (3.120), (3.122) și (3.125) – (3.127), rezultă

$$\{q_R\} = \sum_{r=1}^N \lambda_r \cos \varphi_r \{\Phi^{(r)}\} = \frac{1}{\mu} \sum_{r=1}^N \frac{\sin \varphi_r \cdot \cos \varphi_r}{\gamma_r \Omega_r^2} \{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{\Phi^{(r)}\}, \quad (3.129)$$

$$\{q_I\} = \sum_{r=1}^N \lambda_r \sin \varphi_r \{\Phi^{(r)}\} = \frac{1}{\mu} \sum_{r=1}^N \frac{\sin^2 \varphi_r}{\gamma_r \Omega_r^2} \{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{\Phi^{(r)}\}, \quad (3.130)$$

și

$$[\alpha_R] = \frac{1}{\mu} \sum_{r=1}^N \frac{\sin \varphi_r \cdot \cos \varphi_r}{\gamma_r \Omega_r^2} \{\Phi^{(r)}\} \{\Phi^{(r)}\}^T, \quad (3.131)$$

$$[\alpha_I] = \frac{1}{\mu} \sum_{r=1}^N \frac{\sin^2 \varphi_r}{\gamma_r \Omega_r^2} \{\Phi^{(r)}\} \{\Phi^{(r)}\}^T. \quad (3.132)$$

În acest mod s-a realizat de fapt inversiunea

$$[[K - \omega^2 M] + i[H + \omega C]]^{-1} = [\alpha_R] - i[\alpha_I]. \quad (3.133)$$

Se pot calcula acum componentele energiei complexe transmise structurii într-un ciclu de vibrație.

Energia activă

$$W_R = \pi \{\hat{f}\}^T \{q_I\} = \pi \{q_I\}^T \{\hat{f}\} = \pi \sum_{r=1}^N \lambda_r^2 \{\Phi^{(r)}\}^T [H + \omega C] \{\Phi^{(r)}\} \quad (3.134)$$

este o formă pătratică pozitiv definită, ceea ce corespunde caracterului ei de energie disipată.

Energia reactivă

$$W_I = \pi \{\hat{f}\}^T \{q_R\} = \pi \{q_R\}^T \{\hat{f}\} = \pi \sum_{r=1}^N \lambda_r^2 \cotg \varphi_r \{\Phi^{(r)}\}^T [H + \omega C] \{\Phi^{(r)}\} \quad (3.135)$$

nu este în general pozitiv definită. La fiecare rezonanță de fază, unul din termenii $\cotg \varphi_r$ trece prin zero, de la valori pozitive la valori negative, schimbînd semnul expresiei.

Aceste caracteristici formează baza experimentală a metodei puterii complexe prezentate în § 6.2.2.5.

F. de Veubeke [122] a demonstrat că energia reactivă W_R este staționară în raport cu variații mici ale forțelor generalizate dacă răspunsul se face după un mod propriu. Într-adevăr, condiția

$$\frac{\partial W_I}{\partial \lambda_r} = 2\pi \lambda_r \cotg \varphi_r \{\Phi^{(r)}\}^T [H + \omega C] \{\Phi^{(r)}\} = 0 \quad (3.136)$$

este satisfăcută pentru toate valorile r dacă

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_N = 0, \quad \lambda_i \neq 0$$

și în același timp

$$\cotg \varphi_i = 0 \quad \text{sau} \quad \varphi_i = \frac{\pi}{2}.$$

Aceste condiții sînt similare cu următoarele :

- a) $\omega = \omega_i$ să fie o pulsație proprie;
- b) $\{\tilde{q}\} = -i\lambda_i\{\Psi^{(i)}\}$ să fie un mod propriu în cvadratură cu excitația;
- c) $\{\hat{f}\} = \lambda_i[H + \omega_i C]\{\Psi^{(i)}\}$ să producă excitația unui mod pur.

Pe baza relației (3.128), energia reactivă (3.135) se mai scrie sub forma

$$W_T = \pi\{\hat{f}\}^T[\alpha_R]\{\hat{f}\}. \quad (3.137)$$

Deoarece, pentru variații arbitrare $[\delta\hat{f}]$ ale forțelor excitatoare, trebuie ca

$$\begin{aligned} \delta W_T &= \pi(\{\delta\hat{f}\}^T[\alpha_R]\{\hat{f}\} + \{\hat{f}\}^T[\alpha_R]\{\delta\hat{f}\}) = \\ &= 2\pi\{\delta\hat{f}\}^T[\alpha_R]\{\hat{f}\} = 0, \end{aligned} \quad (3.138)$$

rezultă că anularea răspunsului în fază

$$\{q_R\} = [\alpha_R]\{\hat{f}\} = \{0\} \quad (3.139)$$

implică existența unui răspuns după forma modului propriu corespunzător, în cvadratură cu forțele, care poate apare doar la pulsația de rezonanță.

Pulsațiile proprii ale sistemului sînt deci soluții ale ecuației

$$\det [\alpha_R(\omega)] = 0, \quad (3.140)$$

iar modurile de excitație pură sînt soluții ale ecuației (3.139).

Înlocuind (3.139) în (3.128) rezultă

$$\{q_I\} = [\alpha_I]\{\hat{f}\}, \quad (3.141)$$

de unde se obțin formele modurilor proprii neamortizate, dacă se înlocuiește $\{\hat{f}\}$ cu expresia obținută din relația (3.139).

Aceste observații stau la baza metodelor de excitație a modurilor pure, prezentate în capitolul 6.

3.2.4. Moduri complexe de vibrație

Pentru răspunsul unei structuri liniare cu amortizare neproporțională se poate da o reprezentare modală diferită de cea a modurilor de distorsiune, făcînd apel la teoria modurilor complexe de vibrație.

O formulare generală a problemei se poate face pe baza așa-numitelor „matrice lambda” [66]. Astfel, în cazul vibrațiilor libere ale unui sistem cu amortizare viscoasă, înlocuind în sistemul ecuațiilor de mișcare (3.26) o soluție de forma

$$\{q(t)\} = \{y\} e^{\lambda t}, \quad (3.142)$$

se obține un sistem de N ecuații algebrice omogene, reprezentînd problema de valori proprii

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])\{y\} = \{0\}. \quad (3.143)$$

Aceste ecuații au o soluție nebanală numai dacă determinantul matricei lambda se anulează

$$\det(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K]) = 0. \quad (3.144)$$

Ecuația caracteristică (3.144) este o ecuație algebrică de ordinul $2N$ în λ . Rădăcinile ei pot fi reale, pur imaginare sau complexe. Rădăcinile reale negative corespund unui sistem cu amortizare supra-critică, avînd o mișcare aperiodică de amplitudine descrescătoare. Rădăcinile pur imaginare sînt conjugate și corespund sistemelor neamortizate. Aceste prime două cazuri nu vor fi considerate în cele ce urmează. Interesează în special cazul rădăcinilor complexe conjugate, cu parte reală negativă (sisteme stabile), care corespund sistemelor cu amortizare sub-critică, avînd o mișcare periodică, de amplitudine descrescătoare.

Fiecărei valori proprii λ_r îi corespunde un vector modal $\{y^{(r)}\}$ cu elemente complexe, definind un *mod complex de vibrație*. Valorile proprii fiind complexe conjugate, rezultă că vectorii modali trebuie să fie de asemenea complecși conjugați. O pereche de vectori modali conjugați, înmulțiți cu funcțiile exponențiale dependente de timp, pot fi combinați pentru a rezulta o cantitate reală, descriind o mișcare oscilatorie amortizată.

Soluția generală a ecuației omogene ((3.26) fără membru drept) se poate scrie ca o suprapunere liniară a soluțiilor de forma $\{y^{(r)}\} e^{\lambda_r t}$ înmulțite cu constante arbitrare γ_r (reale sau complexe)

$$\{q(t)\} = [y]\{\gamma e^{\lambda t}\}, \quad (3.145)$$

unde matricea modală

$$[y] = [\{y^{(1)}\} \{y^{(2)}\} \dots \{y^{(2N)}\}], \quad (3.146)$$

iar $\{\gamma e^{\lambda t}\}$ este o coloană de elemente ce joacă rolul de coordonate principale amortizate.

În cazul amortizării hysteretice, reprezentarea modală conține doar N vectori modali, calculele fiind considerabil simplificate.

Un mod complex de vibrație are caracterul unei unde progresive în lungul structurii (spre deosebire de caracterul de undă staționară al modurilor reale „clasiice”), deoarece fiecare element complex al vectorilor modali are alt unghi de fază, deci coordonata corespunzătoare atinge elongația maximă la un moment diferit de celelalte. Modurile complexe sînt mai greu de măsurat direct experimental, deoarece mișcarea, deși este *sincronă, nu este echifazică*. „Nodurile” de vibrație își schimbă continuu poziția în timpul unui ciclu de vibrație, dar secvența în care coordonatele

ating valoarea maximă rămâne aceeași pentru fiecare ciclu, astfel că la începutul unui ciclu pozițiile relative sînt aceleași ca la începutul ciclului anterior.

În cazul vibrațiilor libere, elongațiile maxime descreșc exponențial de la un ciclu la altul, spre deosebire de mișcarea liberă a sistemelor neamortizate, la care nodurile sînt staționare iar elongațiile maxime nu scad în timp.

Datorită acestor dificultăți de „recunoaștere” și măsurare a formei unui mod complex de vibrație, se folosesc metode de identificare combinate (analitico-experimentale), prin care vectorii modali se calculează pe baza datelor experimentale.

3.2.4.1. Amortizare viscoasă

Deși teoria generală a vibrațiilor sistemelor cu amortizare neproporțională se poate expune folosind transformata Laplace [101] și calculul cu matrice lambda, în continuare se va utiliza metoda propusă de Frazer, Duncan și Collar [41].

Fie ecuația de mișcare a unui sistem cu amortizare viscoasă

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}, \quad (3.147)$$

unde $[C]$ este simetrică.

Alăturînd ecuației (3.147) identitatea

$$[M]\{\dot{q}\} - [M]\{\dot{q}\} = \{0\}, \quad (3.148)$$

se obține un sistem de $2N$ ecuații diferențiale de ordinul unu

$$[U]\{\dot{x}\} + [V]\{x\} = \{S\}, \quad (3.149)$$

în care

$$[U] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}, \quad [V] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix}, \quad (3.150)$$

sînt matrice pătrate, reale, simetrice, de ordinul $2N$, iar

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}, \quad \{S\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix} \quad (3.151)$$

sînt matrice coloană cu $2N$ elemente.

Ecuația (3.149) se poate rezolva cu metode similare celor utilizate la analiza sistemelor neamortizate.

a) *Vibrații libere*

Fie ecuația omogenă

$$[U]\{\dot{x}\} + [V]\{x\} = \{0\}. \quad (3.152)$$

Se caută o soluție de forma

$$\{x\} = \{\xi\} e^{\sigma t} \quad (3.153)$$

unde $\{\xi\}$ este un vector cu $2N$ elemente constante.

Înlocuind (3.153) în (3.152) se ajunge la problema de valori proprii

$$\sigma[U]\{\xi\} + [V]\{\xi\} = \{0\}. \quad (3.154)$$

Dacă matricea $[K]$ este nesingulară, se poate înmulți ecuația (3.154) la stînga cu $[V]^{-1}$, rezultînd forma cunoscută

$$\left([D] - \frac{1}{\sigma} [I] \right) \{\xi\} = \{0\}, \quad (3.155)$$

unde

$$[D] = - [V]^{-1}[U] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[K]^{-1}[M] & -[K]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

joacă rolul unei matrice dinamice.

Sistemul (3.155) are soluții nebanale dacă

$$\det \left([D] - \frac{1}{\sigma} [I] \right) = 0. \quad (3.157)$$

Soluțiile acestei ecuații caracteristice de ordinul $2N$ în $\frac{1}{\sigma}$ sînt valorile proprii $\frac{1}{\sigma_r}$ ($r = 1, 2, \dots, 2N$) ale problemei. Se consideră că cele $2N$ valori proprii sînt distincte. Fiecărei valori proprii $\frac{1}{\sigma_r}$ îi corespunde un vector propriu $\{\xi^{(r)}\}$ cu $2N$ elemente, care satisface ecuația

$$\left([D] - \frac{1}{\sigma_r} [I] \right) \{\xi^{(r)}\} = \{0\}$$

sau

$$(\sigma_r[U] + [V])\{\xi^{(r)}\} = \{0\}. \quad (3.158)$$

Între vectorii proprii $\{\xi^{(r)}\}$ și matricele $[U]$ și $[V]$ se stabilesc următoarele relații de ortogonalitate:

$$\{\xi^{(s)}\}^T [U] \{\xi^{(r)}\} = 0, \quad (s \neq r) \quad (3.159)$$

$$\{\xi^{(s)}\}^T [V] \{\xi^{(r)}\} = 0.$$

Dacă se notează

$$\{\xi^{(r)}\}^T [U] \{\xi^{(r)}\} = u_r, \quad (3.160)$$

$$\{\xi^{(r)}\}^T [V] \{\xi^{(r)}\} = v_r,$$

ecuația (3.158) devine

$$\sigma_r u_r + v_r = 0. \quad (3.161)$$

Vectorii proprii au forma

$$\{\xi^{(r)}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \{q^{(r)}\} \\ \{q^{(r)}\} \end{Bmatrix}, \quad (3.162)$$

unde $\{q^{(r)}\}$ este un vector format din N elemente și reprezintă jumătatea inferioară a vectorului $\{\xi^{(r)}\}$.

La sisteme stabile, pentru moduri cu amortizare subcritică, pulsația σ_r este complexă și se exprimă de obicei sub forma

$$\sigma_r = -n_r + i\mu_r \quad (3.163)$$

unde n_r este un factor de amortizare iar μ_r este pseudopulsația.
Se definește raportul de amortizare

$$\tau_r = \frac{2n_r}{\omega_r} = \frac{2n_r}{\sqrt{n_r^2 + \mu_r^2}} \quad (3.164)$$

și pulsația de rezonanță

$$\omega_r = \sqrt{n_r^2 + \mu_r^2}. \quad (3.165)$$

b) *Vibrații forțate*

În vederea decuplării ecuațiilor (3.149), se folosește transformarea liniară

$$\{x\} = [\xi]\{z\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\xi^{(r)}\} z_r, \quad (3.166)$$

unde z_r joacă rolul de coordonate principale, iar matricea modală

$$[\xi] = [\{\xi^{(1)}\} \{\xi^{(2)}\} \dots \{\xi^{(2N)}\}]. \quad (3.167)$$

Înlocuind (3.166) în ecuațiile (3.149) și înmulțind la stînga cu $[\xi]^T$ rezultă sistemul de ecuații decuplate

$$[u] \dot{\{z\}} + [v] \{z\} = \{R\} \quad (3.168)$$

în care s-a notat, folosind relațiile (3.160)–(3.162),

$$[\xi]^T [U] [\xi] = [u] = \text{diag} [u_r], \quad (3.169)$$

$$[\xi]^T [V] [\xi] = [v] = \text{diag} [v_r], \quad (3.170)$$

$$[\xi]^T \{S\} = \{R\}. \quad (3.171)$$

Ecuatia r a sistemului (3.168) se scrie

$$u_r \dot{z}_r + v_r z_r = R_r \quad (3.172)$$

sau, pe baza relației (3.161),

$$\dot{z}_r - \sigma_r z_r = \frac{R_r}{u_r}. \quad (3.173)$$

Presupunind condiții inițiale nule, soluția ecuației (3.173) se poate scrie sub forma integralei de convoluție

$$z_r(t) = \frac{1}{u_r} \int_0^t R_r(\tau) e^{\sigma_r(t-\tau)} d\tau.$$

În cazul excitației armonice, considerînd regimul staționar,

$$\{f(t)\} = \{\hat{f}\} e^{i\omega t}, \quad \{q(t)\} = \{\hat{q}\} e^{i\omega t}, \quad (3.174)$$

se poate nota

$$\{x(t)\} = \{\tilde{x}\} e^{i\omega t}, \quad \{S(t)\} = \{\hat{S}\} e^{i\omega t} \quad (3.175)$$

și corespunzător

$$\{z(t)\} = \{\tilde{z}\} e^{i\omega t}, \quad \{R(t)\} = \{\tilde{R}\} e^{i\omega t}. \quad (3.176)$$

Înlocuind soluții de forma (3.176) în (3.173), rezultă

$$\tilde{z}_r = \frac{\tilde{R}_r}{u_r(i\omega - \sigma_r)} \quad (3.177)$$

sau, folosind (3.171),

$$\tilde{z}_r = \frac{\{\xi^{(r)}\}^T \{\hat{S}\}}{u_r(i\omega - \sigma_r)}. \quad (3.178)$$

Înlocuind (3.178) în (3.166) și ținînd cont de (3.175) se obține

$$\{\tilde{x}\} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\xi^{(r)}\} \{\xi^{(r)}\}^T}{u_r(i\omega - \sigma_r)} \{\hat{S}\}. \quad (3.179)$$

Din (3.151) și pe baza notației (3.174) rezultă

$$\begin{Bmatrix} i\omega \{\hat{q}\} \\ \{\hat{q}\} \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\xi^{(r)}\} \{\xi^{(r)}\}^T}{u_r(i\omega - \sigma_r)} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\hat{f}\} \end{Bmatrix}, \quad (3.180)$$

sau

$$\begin{Bmatrix} i\omega \{\hat{q}\} \\ \{\hat{q}\} \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\xi^{(r)}\}^T}{u_r(i\omega - \sigma_r)} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\hat{f}\} \end{Bmatrix} \{\xi^{(r)}\} \quad (3.181)$$

iar pe baza relației (3.162) se obține

$$\{\tilde{q}\} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{q^{(r)}\}^T \{\hat{f}\}}{u_r(i\omega - \sigma_r)} \{q^{(r)}\}. \quad (3.182)$$

În cazul excitației într-un singur punct l , receptanța de transfer în punctul j are expresia

$$\bar{\alpha}_{jl} = \frac{\tilde{q}_j}{\hat{f}_l} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{q_i^{(r)} q_j^{(r)}}{u_r(i\omega - \sigma_r)} \quad (3.183)$$

sau

$$\bar{\alpha}_{jl} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\delta_{jl}^{(r)}}{i\omega - \sigma_r} \quad (3.184)$$

unde s-a notat

$$\delta_{jl}^{(r)} = \frac{q_i^{(r)} q_j^{(r)}}{u_r}. \quad (3.185)$$

Avînd în vedere că la sisteme amortizate subcritic valorile proprii σ_r și vectorii modali $\{q^{(r)}\}$ apar în perechi complex conjugate, expresia (3.183) se mai scrie ca o sumă de N termeni

$$\bar{\alpha}_{jl} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\delta_{jl}^{(r)}}{i\omega - \sigma_r} + \frac{\delta_{jl}^{(r)*}}{i\omega - \sigma_r^*} \right) \quad (3.186)$$

unde σ_r^* și $\delta_{jl}^{(r)*}$ sînt conjugatele complexe ale cantităților σ_r , respectiv $\delta_{jl}^{(r)}$.

3.2.4.2. Amortizare histeretică

Se consideră ecuațiile de mișcare (3.48) ale unui sistem cu amortizare histeretică, solicitat în regim armonic

$$(-\omega^2[M] + [K + iH])\{\tilde{q}\} = \{\hat{f}\}, \quad (3.187)$$

unde matricele $[M]$ și $[K + iH]$ sînt simetrice, de ordinul N , $\{\tilde{q}\}$ este vectorul amplitudinilor complexe ale deplasărilor iar $\{\hat{f}\}$ — vectorul real al excitației.

Notînd $\omega^2 = \lambda$, se consideră ecuația omogenă

$$([K + iH] - \lambda[M])\{\tilde{q}\} = \{0\}. \quad (3.188)$$

Aceasta are soluții nebanale dacă

$$\det([K + iH] - \lambda[M]) = 0. \quad (3.189)$$

Se demonstrează [63] că există un sistem de N valori proprii complexe $\bar{\lambda}_r$, soluții ale ecuației (3.189) și N vectori proprii complecși asociați $\{w^{(r)}\}$, care satisfac ecuația omogenă

$$([K + iH] - \bar{\lambda}_r[M])\{w^{(r)}\} = \{0\}. \quad (3.190)$$

În continuare, se presupune că cele N valori proprii sînt distincte, iar vectorii modali corespunzători sînt liniar independenți.

Vectorii modali satisfac condițiile de ortogonalitate

$$\{w^{(s)}\}^T [M] \{w^{(r)}\} = 0, \quad (r \neq s) \quad (3.191)$$

$$\{w^{(s)}\}^T [K + iH] \{w^{(r)}\} = 0, \quad (r \neq s) \quad (3.192)$$

și relațiile

$$\{w^{(r)}\}^T [M] \{w^{(r)}\} = \bar{M}_r, \quad (3.193)$$

$$\{w^{(r)}\}^T [K + iH] \{w^{(r)}\} = \bar{K}_r. \quad (3.194)$$

unde \bar{M}_r și \bar{K}_r sînt masa modală complexă, respectiv constanta elastică modală complexă.

Deoarece cei N vectori proprii sînt liniar independenți, orice vector $\{\hat{q}\}$ în spațiul N poate fi exprimat ca o combinație liniară a vectorilor proprii $\{w^{(r)}\}$

$$\{\hat{q}\} = \sum_{r=1}^N \{w^{(r)}\} \bar{p}_r = [w] \{\bar{p}\}. \quad (3.195)$$

Înlocuind (3.195) în ecuația (3.187) și folosind relațiile (3.191) — (3.194), rezultă

$$\bar{p}_r = \sum_{r=1}^N \frac{\{w^{(r)}\}^T \{\hat{f}\}}{\bar{K}_r - \omega^2 \bar{M}_r}. \quad (3.196)$$

Prin urmare, soluția ecuației (3.187) este

$$\{\hat{q}\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{w^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{w^{(r)}\}}{\bar{M}_r (\bar{\lambda}_r - \omega^2)} \quad (3.197)$$

unde

$$\bar{\lambda}_r = \frac{\bar{K}_r}{\bar{M}_r} = \omega_r^2 (1 + ig_r) \quad (3.198)$$

în care ω_r este pulsația de rezonanță iar g_r — factorul de amortizare histeretică ale modului r .

În cazul excitației într-un singur punct, receptanța de transfer complexă are expresia

$$\bar{\alpha}_{j1} = \frac{\bar{q}_j}{\hat{f}_1} = \sum_{r=1}^N \frac{w_i^{(r)} w_j^{(r)}}{\bar{M}_r \omega_r^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + ig_r \right)}. \quad (3.199)$$

Se notează

$$\frac{w_i^{(r)} w_j^{(r)}}{M_r \omega_r^2} = x_j^{(r)} + iy_j^{(r)}, \quad (3.200)$$

deci expresia (3.199) devine

$$\bar{\alpha}_\mu = \sum_{r=1}^N \frac{x_j^{(r)} + iy_j^{(r)}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + ig_r} = \sum_{r=1}^N \frac{(x_j^{(r)} + iy_j^{(r)}) e^{-i\psi_r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + g_r^2}} \quad (3.201)$$

unde

$$\psi_r = \operatorname{arctg} \frac{g_r}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}. \quad (3.202)$$

Principiile identificării dinamice a sistemelor mecanice

4.1. Schema proceselor de identificare dinamică

O categorie largă de metode de identificare a sistemelor mecanice se bazează pe schema din figura 4.1.

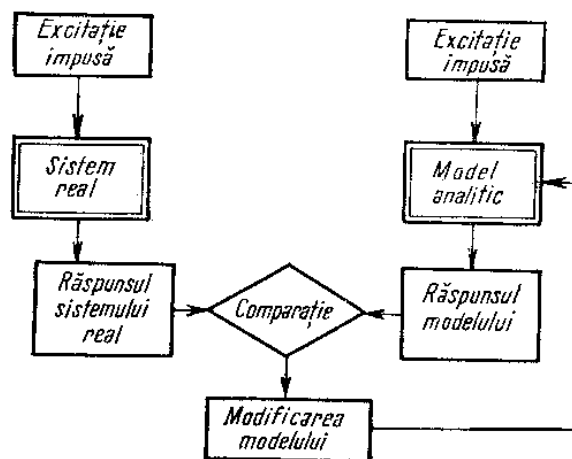


Fig. 4.1

Asupra sistemului real se aplică o solicitare cunoscută — periodică, tranzitorie sau aleatoare — și se măsoară *răspunsul sistemului real* în punctele de interes. Măsurarea se poate face fie în „domeniul timpului” — obținând *vibrograme* sau *corelograme*, care descriu *răspunsul în timp* al sistemului, fie în „domeniul frecvențelor” — obținând o serie de *funcții de răspuns în frecvență* sau *spectrograme*, care descriu *răspunsul în frecvență* al sistemului (fig. 4.2).

Vibrogramele sau graficele funcțiilor de transfer furnizează date cantitative numai asupra configurației particulare din timpul încercării, fiind limitate strict la structura încercată, la forțele aplicate și la punctele în care s-a măsurat răspunsul. De multe ori interesează însă care va fi răspunsul în punctele de măsurare, în cazul unor condiții diferite de solicitare, sau în cazul unor modificări în configurația sau rezemarea struc-

turii. Pentru aprecierea efectului acestor modificări asupra răspunsului dinamic, se recurge la un *model* al structurii.

Modelarea pur analitică s-a dezvoltat considerabil în ultimul timp, datorită în special răspîndirii calculatoarelor numerice, care permit analiza eficientă a unui mare număr de soluții ale aceleiași probleme.

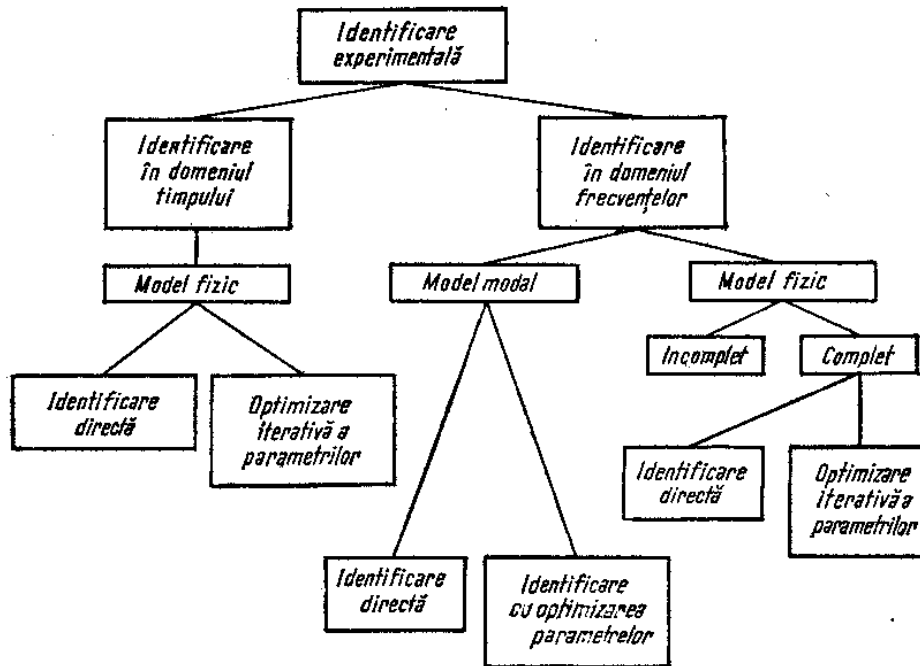


Fig. 4.2

Totuși, modelele pur analitice depind în mare măsură de intuiția și experiența celui care le folosește, avînd în general un caracter calitativ, nefiind capabile să prevadă precis rezultatele încercărilor reale.

Scopul *identificării sistemelor* este elaborarea unor modele pe baza datelor experimentale obținute prin măsurări efectuate pe structura reală. Și în acest caz se fac anumite ipoteze de bază asupra reprezentării analitice a structurii. În figura 4.3 se arată schematic o parte din aceste ipoteze, fiind subliniate cele adoptate în următoarele capitole ale lucrării.

Astfel, pentru o categorie largă de regimuri de vibrații, comportarea structurilor elastice poate fi descrisă adecvat de un sistem de ecuații diferențiale ordinare liniare de forma (3.26) sau (3.43). Acest sistem reprezintă modelul analitic. Prin rezolvarea lui, pentru condiții de solicitare identice cu cele folosite în cadrul încercărilor pe sistemul real, se poate obține *răspunsul modelului*, de exemplu, sub forma unor funcții de răspuns în frecvență.

Comparînd *răspunsul sistemului real* cu *răspunsul modelului* (fig. 4.1) se evaluează parametrii modelului. Aceasta se poate face direct, considerînd eroarea nulă, sau printr-o prelucrare statistică, metodele de identificare diferind în acest caz prin criteriul de minimizare a erorii între valorile măsurate și cele estimate.

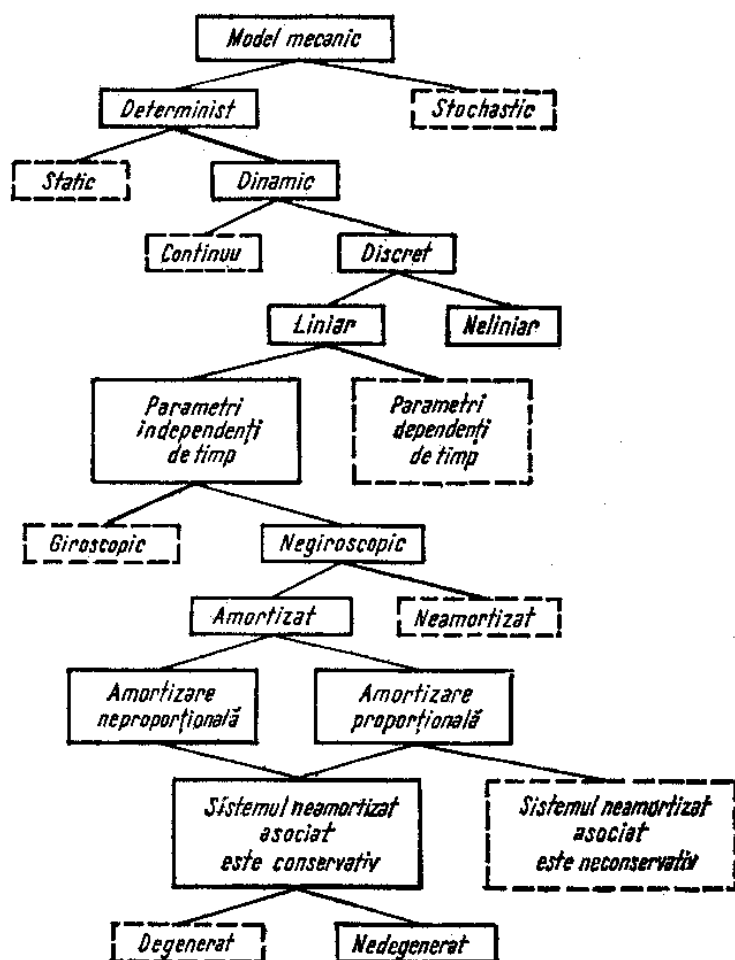


Fig. 4.3

4.2. Determinarea experimentală a caracteristicilor dinamice ale sistemelor reale

Conform celor prezentate anterior, indentificarea sistemelor mecanice se bazează pe prelucrarea matematică a unor rezultate experimentale, determinate astfel încît să furnizeze maximum de informații asupra comportării dinamice a sistemului studiat. Metodele de excitație a structurilor în vederea obținerii acestor date pot fi clasificate ca în tabela 4.1.

4.2.1. Metode de identificare folosind excitație impusă

În majoritatea metodelor de identificare se acționează din exterior asupra sistemului cu o excitație impusă *cunoscută*, numită uneori „semnal de testare” sau „semnal de probă”, care facilitează interpretarea rezultatelor măsurărilor.

Este important ca în timpul experimentării influența altor surse perturbatoare să fie redusă la minimum (chiar anulată). De asemenea trebuie ca echipamentul folosit pentru excitarea structurii, precum și cel pentru măsurarea răspunsului, să nu modifice considerabil parametrii acesteia.

Tabela 4.1

Clasificarea excitațiilor folosite la identificarea structurilor

Excitație impusă (excitație cu semnale de probă)	Excitație armonică	Forțe armonice de amplitudine constantă	Vibratoare electromagnetice sau electrohidraulice
		Forțe armonice de amplitudine proporțională cu pătratul frecvenței	Vibratoare mecanice cu acționarea prin element elastic
		Deplasări armonice de amplitudine constantă	Vibratoare mecanice cu mase excentrice în rotație
	Excitație tranzitorie sau prin șoc	Deplasare inițială, urmată de vibrație liberă	Vibratoare cu acțiune inerțială, cu mase în translație
		Viteză inițială, urmată de vibrație liberă	Mase vibratoare cu servocontrol
		Forță armonică de amplitudine constantă și frecvență rapid variabilă	Încărcare cu cabluri acționate de cabestane sau cu cricuri hidraulice, apoi ruperea bruscă
		Forță armonică de amplitudine proporțională cu pătratul frecvenței și de frecvență variabilă	Lovire cu ciocanul sau cu mase în cădere liberă ; acționare cu cartușe explozive, rachete etc.
	Excitație aleatoare	Forță aleatoare de bandă largă	Vibratoare electromagnetice comandate de generatoare de semnal cu baleiaj rapid de frecvență
		Forță aleatoare de bandă îngustă	Vibratoare cu mase excentrice, cu turația variabilă după întreruperea alimentării electrice
	Excitație din mediul ambiant sau din funcționarea normală	Excitație periodică staționară	Forță aleatoare de bandă largă
Excitație tranzitorie		Pulsațiile gazelor și lichidelor în conductele compresoarelor și pompelor. Forțe datorite rotoarelor dezechilibrate, nealinierei arborilor, cuplajelor, roților dințate, lagărelor, la arbori cu turație constantă	
Excitație aleatoare		Cutremure Rafale de vânt	
		Forțe aleatoare datorite neregularităților căii de rulare a vehiculelor, turbulenței aerului, neomogenității și neregularității pieselor prelucrate pe mașini unelte, funcționării normale a motoarelor etc.	

Metode de acest tip se folosesc în cazul structurilor fixe, al vehiculelor în repaus (de exemplu, încercarea avioanelor la sol), al mașinilor și utilajelor oprite (de exemplu, mașini unelte pe care nu se prelucrează o piesă). Proprietățile structurilor încercate în aceste condiții diferă uneori de cele din timpul funcționării normale, în special în cazul structurilor neliniare. Totuși, alegerea unor nivele de excitație corespunzătoare, precum și realizarea unor pretensionări sau punerea parțială în funcțiune a unor subsansambluri, duce la obținerea unor rezultate satisfăcătoare.

Caracteristicile dinamice ale unui sistem liniar (fig. 4.4), cu o singură mărime de intrare $x(t)$ și o singură mărime de ieșire $y(t)$, pot fi descrise în domeniul timpului — de funcția pondere $h(t)$, iar în domeniul frecven-

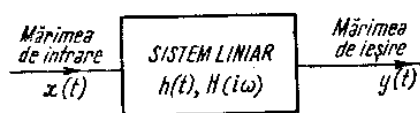


Fig. 4.4

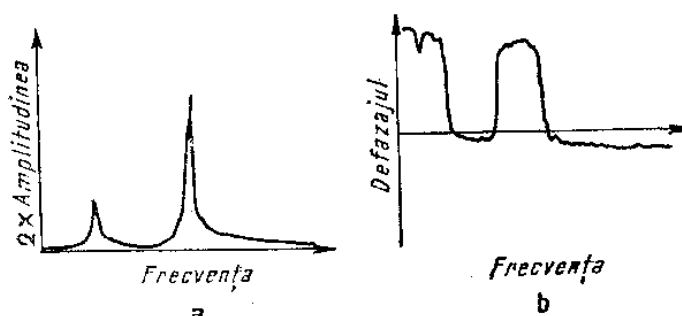


Fig. 4.5

țelor — de funcția de răspuns în frecvență (funcția de transfer) $H(i\omega)$ care formează o pereche de transformate Fourier

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (t > 0) \quad (4.1)$$

În cazul excitației deterministe, răspunsul este dat de integrala de convoluție

$$y(t) = \int_0^t h(t') x(t - t') dt' = x(t) * h(t), \quad (4.2)$$

astfel că funcția pondere $h(t)$ reprezintă răspunsul la o excitație $x(t) = \delta(t)$ de forma impulsului unitate (funcția δ a lui Dirac). Practic, însă, această formă de excitație este irealizabilă, iar impulsurile de foarte scurtă durată nu au energie suficientă pentru a produce un răspuns măsurabil.

Funcția de răspuns în frecvență este dată de relația

$$H(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{X(i\omega)}, \quad (4.3)$$

în care $X(i\omega)$ și $Y(i\omega)$ sînt transformatele Fourier ale excitației și răspunsului, adică

$$X(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (4.4)$$

$$Y(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt,$$

unde limita inferioară este zero pentru sistemele reale.

a) În cazul *excitației armonice*, înlocuind funcții de forma

$$x(t) = \hat{x} e^{i\omega t}, \quad y(t) = \hat{y} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (4.5)$$

în expresiile (4.4) și apoi în (4.3), se obține

$$H(i\omega) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\hat{y}}{\hat{x}} e^{i\varphi}. \quad (4.6)$$

Rezultă că modulul funcției de răspuns în frecvență $|H(i\omega)|$ se poate obține din *caracteristica amplitudine — pulsație* (\hat{y}/\hat{x}) — ω , iar argumentul acestei funcții φ — din *caracteristica fază — pulsație* $\varphi - \omega$, diagrame ce se pot determina experimental, folosind excitație sinusoidală de amplitudine constantă și frecvență variabilă. Cele două caracteristici se pot trasa fie punct cu punct, efectuând măsurări la frecvențe discrete în regim staționar, fie continuu, în regim cvasistaționar, folosind un baleiaj de frecvență suficient de lent pentru a permite stabilirea răspunsului de regim la fiecare frecvență, în special în zona rezonanțelor sistemelor slab amortizate. În figura 4.5 se prezintă un exemplu tipic de astfel de diagrame pentru un sistem cu două rezonanțe în domeniul de frecvențe măsurat.

În sistemele moderne de măsură se folosește un *analizor de funcții de transfer* la intrările căruia se aplică semnalele $x(t) = \hat{x} \sin \omega t$, $y(t) = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi)$ și un semnal de referință $z(t) = \hat{z} \cos \omega t$. Multiplicatorul acestui analizor efectuează produsele

$$\frac{2}{\hat{x}^2} x(t) y(t) = \frac{\hat{y}}{\hat{x}} 2 \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{y}}{\hat{x}} \cos \varphi - \frac{\hat{y}}{\hat{x}} \cos(2\omega t + \varphi),$$

$$\frac{2}{\hat{x}\hat{z}} z(t) y(t) = \frac{\hat{y}}{\hat{x}} 2 \cos \omega t \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{y}}{\hat{x}} \sin \varphi + \frac{\hat{y}}{\hat{x}} \sin(2\omega t + \varphi).$$

Termenii constanți din aceste produse reprezintă partea reală și cea imaginară ale funcției de răspuns în frecvență (4.6), ale căror diagrame au forma din figura 4.6.

Eliminarea termenilor variabili se realizează cu filtre trece — jos, făcând media produselor pe un număr întreg de cicluri de excitație. Introducând semnalele corespunzătoare celor două componente la intrările unui înregistrator în coordonate rectangulare, se obțin diagramele polare (Nyquist) ale răspunsului (fig. 4.7.), folosind baleiajul de frecvență.

Se apreciază că aceste metode oferă precizia maximă, necesitând echipamentul cel mai ieftin, dar efectuarea măsurărilor și în special a montajului experimental durează mult timp, fiind necesare și etalonări frecvente. Deoarece, în prezent, metodele de identificare experimentală cu excitație armonică sînt cel mai larg utilizate, prezentarea lor va ocupa aproape tot cuprinsul lucrării.

b) Folosirea transformatei Fourier rapide și a calculatoarelor electronice permite determinarea funcțiilor de transfer pe baza relației (4.3), folosind *excitație cu semnale tranzitorii sau impulsuri*.

Forma cea mai simplă o reprezintă impulsurile de formă dreptunghiulară, triunghiulară, trapezoidală, semisinusoidală etc., ce pot fi produse cu ajutorul generatoarelor electronice de semnal, cuplate cu vibratoare

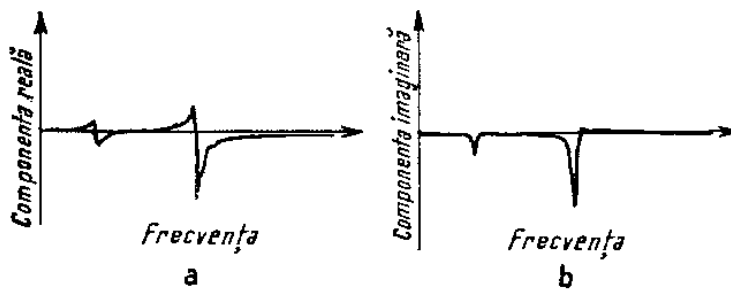


Fig. 4.6

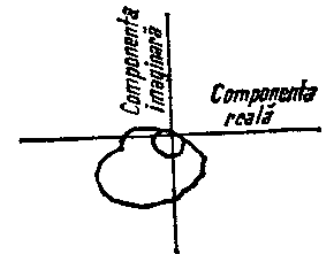


Fig. 4.7

electrodinamice. Deoarece spectrele de amplitudine ale acestor impulsuri se anulează la anumite frecvențe (fig. 4.8) și ocupă teoretic un domeniu infinit de frecvențe, în cazul sistemelor cu mai multe grade de libertate există posibilitatea de a nu se excita anumite rezonanțe, precum și cea a excitării unor rezonanțe în afara domeniului de interes.

Aceste dezavantaje sînt înlăturate prin folosirea excitației cu semnale sinusoidale de amplitudine constantă dar frecvență variabilă rapid în timp [135]. Un semnal de forma

$$x(t) = \sin(at^2 + bt), \quad 0 < t < T,$$

unde T este durata baleiajului, a cărei frecvență variază între limitele f_1 și f_2 , unde

$$a = \frac{\pi}{T}(f_2 - f_1), \quad b = 2\pi f_1,$$

are un spectru de amplitudini aproximativ constant și limitat la banda de frecvențe ($f_2 - f_1$), fiind adecvat identificării structurilor elastice (fig. 4.9).

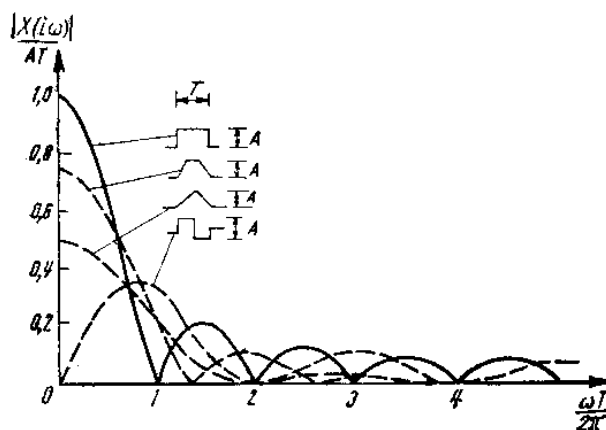


Fig. 4.8

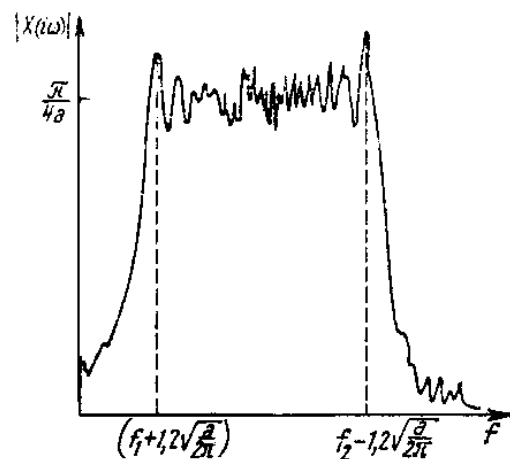


Fig. 4.9

În cazul studiului pe modele la scară redusă sau pe machete, excitația prin lovire cu un ciocan special, prevăzut cu captori de forțe și accelerații, este suficientă pentru obținerea semnalelor $x(t)$ și $y(t)$, care, prelucrate într-un analizor Fourier în timp real, dau direct funcția de răspuns în frecvență [67].

Încercările în regim tranzitoriu sînt cele mai rapide, necesitînd un timp minim de măsurare. Chiar cînd se folosesc vibratoare, montajul acestora este mult simplificat [135]. În schimb, echipamentul de măsură este mult mai scump. Domeniul dinamic al aparaturii trebuie să fie mai mare decît cel necesar măsurărilor în regim armonic. În timpul înregistrării semnalelor, amplificatoarele și convertoarele analog-numerice din montaj nu trebuie să lucreze în suprasarcină. În general, la încercarea prin lovire se obțin rapoarte semnal/zgomot inferioare celor ce rezultă folosind alte tipuri de excitație.

c) Adesea, la identificarea sistemelor se recurge la metode de *excitație cu semnale aleatoare*.

În acest scop se folosesc generatoare de zgomot de bandă largă, care cuplate cu vibratoare electrodinamice produc o excitație avînd un spectru de amplitudine constantă pe toată banda frecvențelor de interes. Astfel toate componentele spectrale sînt excitate simultan și se poate face o analiză în timp real prezentînd rezultatele simultan pe ecranul unui osciloscop.

Funcția de răspuns în frecvență se calculează cu relația

$$H(i\omega) = \frac{S_{xy}(i\omega)}{S_{xx}(\omega)}, \quad (4.7)$$

unde $S_{xx}(\omega)$ este densitatea spectrală de putere a excitației (staționară și ergodică) iar $S_{xy}(i\omega)$ este densitatea interspectrală de putere a excitației și răspunsului.

Dacă $S_{xx}(\omega) = S_0 = \text{const.}$ pe tot domeniul frecvențelor de interes („zgomot alb” realizabil tehnic), densitatea interspectrală este proporțională cu funcția de răspuns în frecvență $S_{xy}(i\omega) = S_0 H(i\omega)$, iar funcția de intercorelație între excitație și răspuns

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.8)$$

este proporțională cu funcția pondere $h(t)$.

Atunci cînd nu interesează informația asupra variației fazei cu frecvența, se poate folosi relația

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{S_{yy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}, \quad (4.9)$$

unde $S_{yy}(\omega)$ este densitatea spectrală de putere a răspunsului.

O altă metodă constă în folosirea excitației cu semnale pseudoaleatoare. În acest caz semnalele sînt fie produse de un generator electronic special proiectat, fie sintetizate cu ajutorul unui aparat pentru efectuarea transformatei Fourier rapide, care face transformarea inversă a unei funcții spectrale dorite.

Încercările în regim aleator au avantajul de a excita simultan toate componentele spectrale din domeniul de interes, ceea ce permite identificarea structurilor cu parametri variabili în timp. Folosind o mediere exponențială la calculul spectrelor $S_{xx}(\omega)$ și $S_{xy}(i\omega)$, se poate face o analiză în timp real, deci o observare „on-line” a acestor modificări. Procedul este deosebit de util la optimizarea răspunsului unei structuri prin modificarea repartiției maselor, rigidității sau amortizării.

În general, echipamentul necesar pentru efectuarea acestui tip de măsurări este mai scump decât cel folosit la încercările în regim armonic, raportul semnal/zgomot este mai mic (dar poate fi îmbunătățit măbind timpul de mediere), iar nivelul realizabil al răspunsului este limitat de faptul că puterea sistemului de excitație este repartizată pe o bandă largă de frecvențe.

4.2.2. Metode de identificare folosind excitație din funcționarea normală

Există situații în care este preferabilă identificarea în condiții normale de lucru sau folosind excitație din mediul ambiant. Astfel, amortizarea unui avion în zbor sau la încercări în tunelul aerodinamic diferă de amortizarea în timpul încercărilor la sol, atât ca natură fizică (apare în plus cea produsă de turbulența aerului) cât și ca distribuție (matricea amortizării nu mai este hermitică). Vibrațiile transversale ale rotoarelor elastice în timpul funcționării normale sînt influențate de efecte giroscopice care nu se manifestă la încercările în care nu se imprimă și o mișcare de rotație. De asemenea, neliniaritățile structurale (datorite jocurilor, cuplajelor, ghidajelor) acționează diferit la diferite nivele ale forțelor întîlnite în funcționarea curentă.

În unele cazuri, excitația „activă” (cu semnale de probă), mai ales cea armonică, mărește nivelul răspunsului structurii peste limitele admisibile, existînd pericol de rupere sau deteriorare chiar în timpul încercărilor. În alte cazuri, excitația activă este insuficientă, ca în cazul podurilor și clădirilor mari, sau al fundațiilor masive, cînd abia excitația seismică sau cea datorită vîntului produc răspunsuri ale întregii structuri, de nivele măsurabile.

Rezultate bune se obțin calculînd funcția de răspuns în frecvență cu ajutorul relației (4.7). Existența subrutinelor pentru evaluarea rapidă a transformatei Fourier cu ajutorul calculatoarelor numerice, permite obținerea funcțiilor $S_{xy}(i\omega)$ și $S_{xx}(\omega)$ din funcția de intercorelație

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

și funcția de autocorelație

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt,$$

determinate cu un corelator, pe baza semnalelor $x(t)$ și $y(t)$ măsurate în două puncte diferite ale structurii (fig. 4.10). Metoda se bazează pe relațiile de transformare (4.8) și (4.10)

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.10)$$

Aceleași operații se pot face cu ajutorul analizoarelor spectrale în timp real, bazate pe efectuarea transformatei Fourier rapide.

Prin calculul funcției de coerență $\left(\frac{|S_{xy}(i\omega)|^2}{S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega)} \right)^{1/2}$ se poate evalua domeniul de frecvențe și amplitudinea răspunsului neliniar.

În afara metodei prezentate mai sus, în practică se utilizează o serie de metode de excitație *ad-hoc*, mai ales când instalațiile dispun de motoare cu turație variabilă. Modificarea parametrilor funcționali — în special variația turației — permite aplicarea metodelor de identificare bazate pe studiul răspunsului în vecinătatea rezonanțelor structurale.

4.2.3. Identificarea cu ajutorul modelelor ajustabile

Metodele de identificare folosind modele ajustabile, deși larg utilizate la identificarea proceselor automatizate, au încă o utilizare redusă în domeniul sistemelor mecanice. În principiu, se folosește un model fizic al sistemului — de exemplu, un generator de funcții de transfer — la intrarea căruia se introduce un semnal identic cu semnalul de excitație a structurii studiate. Semnalul de la ieșirea modelului este comparat cu semnalul care indică răspunsul structurii și, în funcție de diferența dintre ele, se efectuează ajustarea modelului. De obicei structura modelului este fixă, modificându-se doar parametrii — manual sau automat — pînă la minimizarea unei funcționale a erorii, urmărind ca metoda să asigure o convergență cât mai rapidă. Dacă ajustarea parametrilor modelului se face automat — acesta se numește *model adaptiv*. Dacă modelul este prevăzut cu o memorie, astfel încît, pe baza informațiilor asupra modificărilor în timp ale parametrilor structurii, adoptă o strategie corespunzătoare de ajustare a parametrilor săi, el se numește *model instruibil*.

Aceste metode au avantajul aplicării în condiții de funcționare normală a mașinilor și a deducerii directe și cu precizie ridicată a modelului matematic. Utilizarea lor pe scară largă este întîrziată de prețul încă foarte ridicat al echipamentului analogic și numeric necesar aplicării practice.

4.2.4. Analiza liniilor nodale

Un studiu sistematic al modurilor proprii de vibrație ale elementelor sub formă de plăci plane, dar mai ales ale rotoarelor, ale paletelor turbinelor și compresoarelor axiale, ale palelor elicelor de avion și vapor, se face prin *analiza liniilor nodale*, numite și *figurile lui Chladni*, după numele celui care le-a pus în evidență încă din 1787 [23].

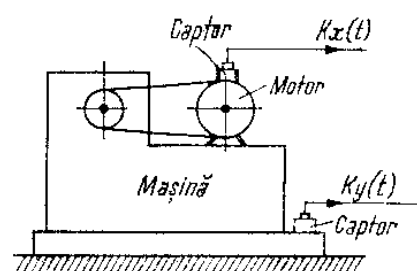


Fig. 4.10

De exemplu, dacă se solicită o placă circulară, liberă pe contur (sau discul unui rotor), cu o forță armonică de frecvență variabilă și se răspîndește nisip fin pe suprafața orizontală a plăcii, la fiecare rezonanță nisipul se adună în lungul liniilor nodale (linii cu amplitudine nulă de vibrație), care în acest caz, conform teoriei vibrațiilor plăcilor circulare subțiri, sînt diametre și cercuri, avînd forma din figura 4.11.

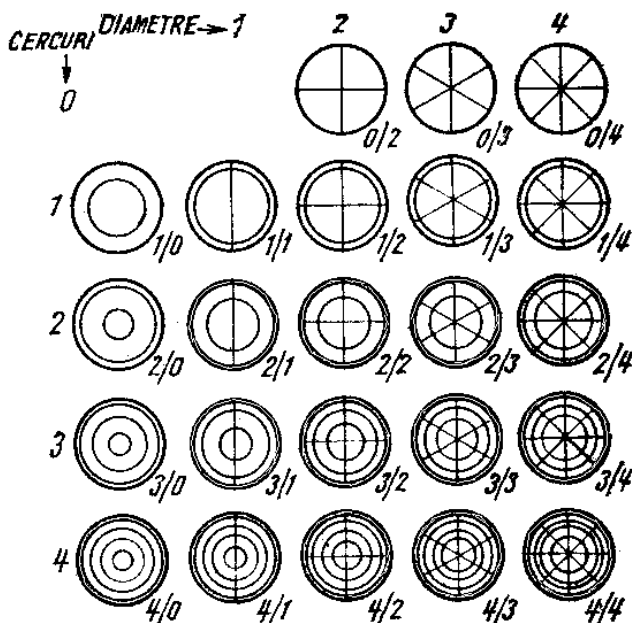


Fig. 4.11

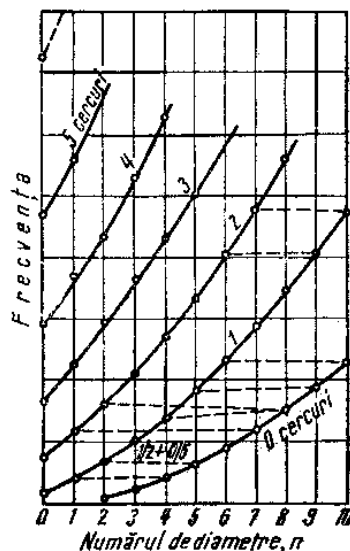


Fig. 4.12

O reprezentare sistematică a frecvențelor de rezonanță se face pe un grafic ca în figura 4.12, în care acestea sînt grupate în familii de moduri avînd același număr de cercuri nodale, într-un sistem de axe avînd în abscisă numărul de diametre nodale.

La determinarea experimentală a frecvențelor proprii, se trasează întii puncte cîorespuzătoare valorilor măsurate ale frecvențelor de rezonanță și numărului respectiv de diametre nodale. Se unesc apoi prin linii continue punctele cu același număr de cercuri nodale. Dacă vreuna din frecvențele de rezonanță a fost omisă, ea poate fi acum determinată la intersecția graficului respectiv cu verticala cîorespuzătoare unui anumit număr de diametre nodale.

După cum rezultă din figura 4.12, există posibilitatea ca moduri diferite de vibrație să aibă aproximativ aceeași frecvență de rezonanță. În acest caz, cele două moduri independente de vibrație sînt excitate simultan, rezultînd un mod compus, ale cărui linii nodale nu mai sînt cercuri sau diametre.

Spre exemplu, modul propriu de vibrație cu 1 cerc și 2 diametre nodale, notat simbolic „modul 1/2”, și modul de vibrație cu 0 cercuri și 5 diametre nodale, notat simbolic „modul 0/5”, au aproximativ aceeași frecvență proprie, rezultînd un „mod compus 1/2 + 0/5”, forma liniilor nodale avînd aspectul din figura 4.13 a.

Alura acestor linii se poate deduce și teoretic, folosind următoarea construcție. În figurile 4.13 b și c s-au reprezentat modurile 1/2 și 0/5, hașurînd suprafețele care în timpul vibrației se deplasează, de exemplu,

în jos și lăsînd nehașurate suprafețele care în același timp se deplasează în sus. Suprapunînd cele două figuri (fig. 4.13 *d*), se obțin suprafețe dublu hașurate, care se deplasează „în jos” și suprafețe nehașurate, care se deplasează „în sus”. Suprafețele simplu hașurate conțin puncte în care amplitudinea vibrației se anulează.

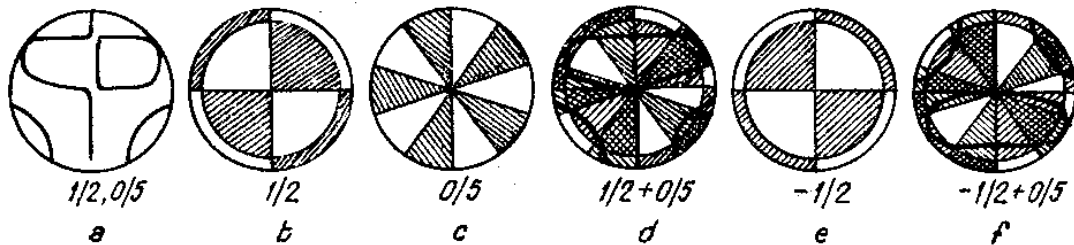


Fig. 4.13

Prin urmare, liniile nodale trec printre suprafețele dublu hașurate și cele nehașurate, și anume prin suprafețele simplu hașurate. Traseul lor exact în aceste zone depinde de amplitudinea relativă a mișcărilor în cele două moduri independente de vibrație și de uniformitatea grosimii plăcii.

În funcție de defazajul între cele două moduri, există totdeauna două poziții posibile ale liniilor nodale ale unui mod compus. Astfel, dacă mișcarea în modul $1/2$ se face ca în figura 4.13 *e* (în antifază cu cea reprezentată în figura 4.13 *b*), atunci din combinația cu modul $0/5$ (fig. 4.13 *c*) rezultă modul compus din figura 4.13 *f*, identic cu cel din figura 4.13 *d*, însă rotit 180° .

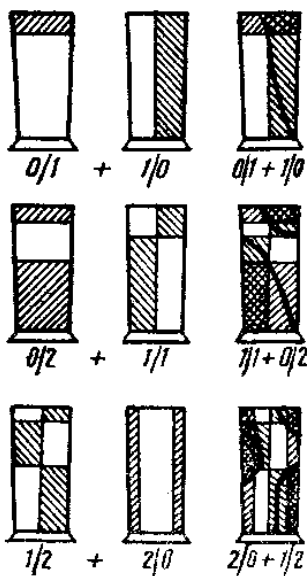


Fig. 4.14

Studiul sistematic al modurilor simple de vibrație și al modurilor compuse ale plăcilor plane în consolă a permis o înțelegere a modurilor de vibrație compuse ale paletelor de turbină și o interpretare corectă a liniilor nodale corespunzătoare.

Astfel, dacă se notează m = numărul de linii nodale pe lățimea paletii, n = numărul de linii nodale în lungul paletii, notînd modurile de vibrație simbolic prin raportul m/n , se obțin modurile compuse din figura 4.14, puse în evidență experimental.

Diagrame de forma celei din figura 4.12 permit detectarea „pe hîrtie” a modurilor nedescoperite experimental, care pot fi puse apoi în evidență prin încercări repetate în jurul frecvenței de rezonanță corespunzătoare.

Descompunerea modurilor compuse în modurile constituente permite să se facă o comparație utilă între comportarea dinamică a unei paletă cu formă modificată și paleta avînd forma inițială. Altfel, datorită alurii mult diferite a liniilor nodale, s-ar putea face o comparație eronată, între două moduri compuse diferite.

O prezentare a aparatului utilizat la identificarea sistemelor elastice se face în lucrarea [19].

4.3. Structura modelelor analitice

4.3.1. Modele discrete

Structurile reale sînt în general sisteme continue, cu parametri distribuiți. Configurația lor ar trebui deci definită printr-un număr infinit de coordonate generalizate, existînd teoretic un număr infinit de grade de libertate.

Din punct de vedere practic, de obicei interesează doar mișcarea cîtorva puncte semnificative ale structurii, definită prin variația unui număr finit de coordonate generalizate. De aici — necesitatea și utilitatea modelelor cu număr finit de grade de libertate, precum și justificarea folosirii unui sistem de ecuații de mișcare de forma (3.26) sau (3.43).

În general, caracteristicile unui model depînd în primul rînd de modul în care este solicitată structura studiată. Niciodată nu este necesar ca modelul să se comporte din toate punctele de vedere identic cu structura reală. În fiecare aplicație practică, interesează modelarea răspunsului într-un număr limitat de puncte ale structurii și pe un domeniu limitat de frecvențe ale forțelor excitatoare.

Punctele de măsură trebuie însă să fie reprezentative pentru răspunsul structurii. Astfel, de exemplu, în *sinteza modală* acestea trebuie să includă punctele de legătură între diferitele subsisteme. La optimizarea structurilor — trebuie să cuprindă punctele în care există posibilitatea efectuării unor modificări masice sau de rigiditate. În general, alegerea lor, precum și a punctelor de excitație, trebuie astfel făcută încît din rezultatele experimentale să se poată obține o imagine cît mai cuprinzătoare asupra deformatei dinamice a structurii. Totuși, alegerea unui număr prea mare de puncte duce la dificultăți, mai ales atunci cînd se pune problema trecerii de la modelul modal la un model fizic.

4.3.2. Modele modale

Majoritatea metodelor de identificare prezentate în această lucrare urmăresc definirea unui *model modal*. Rezumînd cele prezentate în capitolul 3 pentru sisteme cu *amortizare viscoasă proporțională*, din punct de vedere matematic, un model modal constă în trei tipuri de ecuații :

a) Cite o ecuație diferențială pentru mișcarea în fiecare mod

$$m_r \ddot{p}_r + c_r \dot{p}_r + k_r p_r = F_r, \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (4.11)$$

care arată că sistemul răspunde în fiecare mod la fel ca un sistem „masă-arc-amortizor”, cu un grad de libertate, complet decuplat.

b) O ecuație de transformare a coordonatelor

$$q_j = \sum_{r=1}^N \Psi_j^{(r)} p_r, \quad (j = 1, 2, \dots, P) \quad (4.12)$$

care arată că mișcarea în punctele de interes ale sistemului real poate fi calculată prin însumarea mișcărilor în toate modurile, înmulțite cu coeficientul de formă modal respectiv.

c) O ecuație de transformare a forțelor

$$F_r = \sum_{l=1}^P \Psi_l^{(r)} f_l, \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (4.13)$$

care arată că forța care „acționează asupra fiecărui mod” este egală cu suma forțelor exterioare ce acționează asupra structurii, înmulțite cu coeficienții de formă respectivi.

În cazul amortizării neproporționale se definesc mărimi complexe similare (v. Cap. 3).

Dacă se admite limitarea la sisteme liniare, negiroscopice și cu parametri invariabili în timp, definitoriu pentru structura modelului analitic este nivelul amortizării din sistem. Se pot distinge următoarele patru cazuri:

a) La structuri foarte slab amortizate, la care raportul de amortizare ζ (fracțiunea din amortizarea critică) este sub 0,05, amortizarea se poate neglija, astfel că mișcarea este descrisă de sistemul (3.15).

Răspunsul armonic poate fi exprimat în funcție de parametrii modali și de modurile reale „clasice” de vibrație, sub forma (3.24)

$$\{q\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{\Psi^{(r)}\}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}, \quad (4.14)$$

unde ω_r sînt pulsațiile proprii, m_r — masele modale, $\{\Psi^{(r)}\}$ — vectorii modali.

b) La structuri cu amortizare redusă, se neglijează termenii nediagonali ai matricii $[\Psi]^T [C] [\Psi]$, astfel că răspunsul poate fi exprimat tot în funcție de modurile reale „clasice” ale sistemului conservativ asociat (3.42)

$$\{q\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{\Psi^{(r)}\}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + i 2\zeta_r \omega \omega_r)} e^{i\omega t} \quad (4.15)$$

unde $\zeta_r = \frac{c_r}{2m_r \omega_r}$ este raportul de amortizare modal.

c) La structuri sau substructuri cu amortizare moderată, cuplajele prin amortizare nu mai pot fi neglijate, se consideră că amortizarea este neproporțională, iar răspunsul se exprimă în funcție de modurile reale forțate de vibrație (3.114)

$$\{q\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Phi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{\Phi^{(r)}\}}{\{\Phi^{(r)}\}^T [K - \omega^2 M] \{\Phi^{(r)}\} + i \{\Phi^{(r)}\}^T [\omega C] \{\Phi^{(r)}\}} e^{i\omega t} \quad (4.16)$$

sau în funcție de modurile complexe de vibrație (3.182)

$$\{q\} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{q^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{q^{(r)}\}}{u_r(i\omega - \sigma_r)} e^{i\omega t} \quad (4.17)$$

unde $\sigma_r = \omega_r \left(-\frac{1}{2} \tau_r + i \sqrt{1 - \frac{1}{4} \tau_r^2} \right)$ iar τ_r și u_r sînt definiți de (3.164) și (3.160).

d) La componente puternic amortizate, la care nu se pot distinge moduri de vibrație individuale, răspunsul în frecvență se exprimă sub forma unei fracții raționale

$$\bar{\alpha}_{ji} = \frac{\bar{q}_j}{\hat{f}_i} = \frac{\sum_{r=0}^m P_r(i\omega)^r}{1 + \sum_{r=1}^n Q_r(i\omega)^r} \quad (4.18)$$

în care coeficienții P_r , Q_r se determină prin metode iterative.

Formulele de mai sus sînt valabile pentru sisteme cu amortizare viscoasă.

4.3.3. Natura parametrilor modelelor analitice

Parametrii care definesc răspunsul unei structuri continue pot fi clasificați în două categorii: parametri măsurabili (observabili) și parametri abstracti (intuitivi).

Parametrii măsurabili sînt cei care pot fi determinați (cel puțin în principiu) prin măsurări directe pe structura reală. Ei nu depind de structura modelului analitic.

Spre exemplu, elementele matricei coeficienților de influență $[\delta] = [K]^{-1}$ sînt măsurabile. Prin definiție, elementul δ_{ij} al matricei $[\delta]$ reprezintă deplasarea în coordonata i datorită unei forțe unitate aplicate coordonatei j . Această cantitate, măsurabilă, nu depinde de forma modelului analitic.

În aceeași categorie pot fi considerați vectorii modali $\{\Psi^{(r)}\}$, parametrii modali m_r , k_r , c_r și deci funcțiile răspunsului în frecvență de tipul receptanței, mobilității, inertanței etc.

Din punct de vedere analitic, parametrii măsurabili se pot exprima în funcție de vectorii modali. Astfel $[k] = [\Psi]^T [K] [\Psi]$. Evaluarea lor analitică necesită rezolvarea unei ecuații diferențiale.

Parametrii abstracti se obțin direct din proprietățile materialelor, de aceea se mai numesc și *intuitivi*. Ei nu pot fi determinați prin măsurări directe pe structura reală, valorile lor depinzînd de forma modelului analitic.

Spre exemplu, valorile elementelor matricelor $[M]$, $[C]$ și $[K]$ nu sînt măsurabile. Prin definiție, elementul k_{ij} al matricei $[K]$ este egal cu forța interioară care apare la coordonata i , datorită unei deplasări unitate în coordonata j , cînd toate coordonatele cu excepția lui j sînt constrînse să fie nule. Acest tip de legătură nu se poate realiza într-o încercare practică și deci k_{ij} nu este direct măsurabil. Valorile elementelor k_{ij} depind, de exemplu, de numărul și dispunerea punctelor alese drept coordonate în formularea modelului.

Din punct de vedere analitic, parametrii abstracti se exprimă în funcție de inversele matricelor modale. Astfel $[K] = [\Psi]^{-T} [k] [\Psi]^{-1}$. Ei pot fi deduși direct din analiza matematică a modelului și au un sens

fizic intuitiv. Transformarea lor în cantități măsurabile necesită o inversiune matriceală sau rezolvarea unei ecuații diferențiale.

În concluzie, „nu se pot măsura direct parametrii care pot fi modelați intuitiv și nu se poate modela direct ceea ce se poate măsura” [10].

4.3.4. Trecerea de la modelul modal la modelul fizic

După cum s-a mai menționat, multe metode de identificare se limitează la determinarea pulsațiilor proprii, a vectorilor modali și a parametrilor modali — deci a unui model modal. Metodele care, pe baza informației modale determinate experimental, își propun evaluarea parametrilor fizici intuitivi ai modelului, se lovesc de dificultăți legate în primul rînd de inversarea unor matrice rău condiționate numeric sau de neunicitatea determinării matricelor modelului fizic.

4.3.4.1. Dificultăți de calcul

Dacă n-ar exista probleme legate de inversarea matricelor rău condiționate determinate experimental, identificarea sistemelor mecanice s-ar simplifica mult. Pentru ilustrarea acestei afirmații se va considera un exemplu simplu.

Ecuațiile vibrațiilor armonice ale unui sistem conservativ se scriu sub forma

$$([K] - \omega^2[M])\{\hat{q}\} = \{\hat{f}\}. \quad (4.19)$$

Dacă se aplică forțe armonice de pulsație ω_1 la fiecare din coordonatele arbitrare ale modelului structurii și se înregistrează deplasările tuturor acestor puncte, se măsoară matricea receptanțelor.

$$[[K] - \omega_1^2[M]]^{-1} = [\alpha(\omega_1)]. \quad (4.20)$$

Repetînd măsurările cu forțe de pulsație $\omega_2 \neq \omega_1$, se obține

$$[[K] - \omega_2^2[M]]^{-1} = [\alpha(\omega_2)]. \quad (4.21)$$

Inversînd cele două matrice măsurate $[\alpha(\omega_1)]$ și $[\alpha(\omega_2)]$, din ecuațiile (4.20) și (4.21) rezultă sistemul

$$\begin{aligned} [K] - \omega_1^2[M] &= [\alpha(\omega_1)]^{-1}, \\ [K] - \omega_2^2[M] &= [\alpha(\omega_2)]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

de unde se calculează matricele $[K]$ și $[M]$.

Cu excepția unor cazuri particulare (sisteme cu număr mic de grade de libertate), metoda nu se poate aplica deoarece matricele receptanțelor nu pot fi inversate, în special cînd numărul coordonatelor alese este mare. În acest caz, domeniul acoperit de valorile pulsațiilor proprii devine atît de larg, încît cerințele privind precizia măsurărilor nu mai pot fi realizate.

Într-adevăr, din dezvoltarea spectrală a unei matrice se știe că valoarea proprie cea mai mică a unei matrice devine valoarea proprie cea mai mare a matricei inverse.

Folosind notația $[K]^{-1} = [\delta]$, ecuațiile (3.5) se scriu

$$\begin{aligned} [M]^{-1}[K]\{\Psi^{(r)}\} &= \omega_r^2\{\Psi^{(r)}\}, \\ [\delta][M]\{\Psi^{(r)}\} &= \frac{1}{\omega_r^2}\{\Psi^{(r)}\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Vectorii proprii la dreapta ai matricelor $[M]^{-1}[K]$ și $[\delta][M]$ sînt identici. În schimb, modul dominant al matricei $[M]^{-1}[K]$ este cel cu pulsația ω_r cea mai înaltă, în timp ce modul dominant al matricei $[\delta][M]$ este cel cu pulsația ω_r cea mai joasă.

Folosind matricea modală (3.12), ecuațiile (4.23) devin

$$\begin{aligned} [M]^{-1}[K][\Psi] &= [\Psi][\omega_r^2], \\ [\delta][M][\Psi] &= [\Psi]\left[\frac{1}{\omega_r^2}\right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Utilizînd relația (3.21), se deduce

$$[K] = [M][\Psi]\left[\frac{\omega_r^2}{m_r}\right][\Psi^T][M] = \sum_{r=1}^N \frac{\omega_r^2}{m_r} [M]\{\Psi^{(r)}\}\{\Psi^{(r)}\}^T[M], \quad (4.25)$$

$$[\delta] = [\Psi]\left[\frac{1}{\omega_r^2 m_r}\right][\Psi^T] = \sum_{r=1}^N \frac{1}{\omega_r^2 m_r} \{\Psi^{(r)}\}\{\Psi^{(r)}\}^T. \quad (4.26)$$

Rezultă că termenii dominanți ai matricei $[K]$ provin din contribuția modurilor proprii înalte (deoarece ω_r este la numărător). În schimb, termenii dominanți ai matricei $[\delta]$ provin din contribuția modurilor cu pulsații proprii joase (aceasta fiind invers proporțională cu ω_r^2).

Dacă matricea $[\delta]$ — măsurabilă, este rău condiționată și nu conține informații utile asupra modurilor cu pulsații proprii înalte, nici inversa ei $[K]$ nu va conține, deci elementele matricei $[K]$ vor avea valori nesemnificative. Berman [10] a arătat că dacă între pulsațiile proprii extreme există raportul $\frac{\omega_N}{\omega_1} = 100$, atunci $\left(\frac{\omega_N}{\omega_1}\right)^2 = 10^4$, astfel că precizia determinării experimentale a elementelor δ_{ij} trebuie să fie de ordinul $1 : 10^4$ pentru a avea o matrice $[\delta]$ invertibilă.

4.3.4.2. Neunicitatea modelării matricei amortizării proporționale

În cazul amortizării viscoase proporționale, pe baza relației

$$[C] = [\Psi]^{-T}[2\zeta_r \omega_r m_r][\Psi]^{-1}, \quad (4.27)$$

care se deduce din (3.28), (3.36) și (3.41), din punct de vedere teoretic, este posibilă determinarea elementelor matricei amortizării $[C]$, dacă se cunoaște matricea modală $[\Psi]$, pulsațiile de rezonanță ω_r , rapoartele de amortizare modale ζ_r și masele modale m_r .

Pentru simplificarea expunerii ce urmează, se consideră că prin normalizare se alege $m_r = 1$ ($r = 1, 2, \dots, N$), deci relația (4.27) devine

$$[C] = [\Psi]^{-T} [2\zeta_r \omega_r] [\Psi]^{-1}. \quad (4.28)$$

Totuși, deoarece o matrice simetrică ($N \times N$) poate avea $\frac{1}{2} N(N+1)$ elemente distincte, dar se pot stabili numai N ecuații (4.28), orice metodă de calcul a matricei $[C]$ care se bazează doar pe valorile ζ_r și ω_r , dispune de un număr insuficient de ecuații pentru a determina în mod unic elementele matricei amortizării. Există o singură excepție — în cazul cînd matricea $[C]$ este diagonală, deci cînd amortizoarele care modelează disiparea de energie (în modelul fizic) sînt legate între fiecare masă și un reper fix, și nu între mase.

Forma cea mai simplă de amortizare viscoasă proporțională este descrisă de ecuația (3.34), în care matricea $[C]$ are forma

$$[C] = \sigma[M] + \tau[K]. \quad (4.29)$$

Din relațiile (4.28) și (4.29) rezultă

$$[2\zeta_r \omega_r] = \sigma[I] + \tau[\omega_r^2] \quad (4.30)$$

unde $[I]$ este matricea unitate.

Dacă se determină experimental valorile rapoartelor de amortizare ζ_1 și ζ_2 , în două moduri de vibrație cu pulsații proprii ω_1 și ω_2 , constantele σ și τ se pot calcula cu relațiile

$$\sigma = \frac{2\omega_1\omega_2(\omega_1\zeta_2 - \omega_2\zeta_1)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \quad (4.31)$$

$$\tau = \frac{2(\omega_1\zeta_1 - \omega_2\zeta_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}. \quad (4.32)$$

În acest fel, rapoartele de amortizare în modurile $r > 2$ vor fi

$$\zeta_r = \frac{\sigma + \tau\omega_r^2}{2\omega_r}, \quad (4.33)$$

indicînd o variație aproximativ liniară cu pulsația.

Metoda are dezavantajul de a impune valorile (4.33) ale amortizării în modurile superioare de vibrație, putînd rezulta astfel coeficienți de amortizare negativi în unele moduri de vibrație.

Într-o formă mai generală, matricea $[C]$ se poate exprima printr-o serie de puteri ale matricelor $[M]$ și $[K]$.

Dacă în ecuația de mișcare (3.26) se înlocuiește

$$[M] = [A]^T[A], \quad (4.34)$$

unde $[A]$ este o matrice triunghiulară, și se face transformarea de coordonate

$$\{q\} = [A]^{-1}\{\xi\} \quad (4.35)$$

se obține, după înmulțire la stînga cu $[A]^{-T}$,

$$[I]\{\ddot{\xi}\} + [A]^{-T}[C][A]^{-1}\{\dot{\xi}\} + [A]^{-T}[K][A]^{-1}\{\xi\} = [A]^{-T}\{f\} \quad (4.36)$$

sau

$$[I]\{\ddot{\xi}\} + [c^0]\{\dot{\xi}\} + [k^0]\{\xi\} = \{f^0\}, \quad (4.37)$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned} [c^0] &= [A]^{-T}[C][A]^{-1}, \\ [k^0] &= [A]^{-T}[K][A]^{-1}, \\ \{f^0\} &= [A]^{-T}\{f\}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Matricea $[c^0]$ se poate exprima printr-o serie de matrice de forma

$$[c^0] = \sum_{r=0}^{N-1} \gamma_r [k^0]^r. \quad (4.39)$$

Pe baza ecuației (4.37), rezultă N ecuații algebrice de forma

$$\gamma_0 + \gamma_1 \omega_r^2 + \gamma_2 \omega_r^4 + \dots + \gamma_{N-1} \omega_r^{2(N-1)} = 2\zeta_r \omega_r$$

care se scriu matriceal sub forma

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega_1^2 & \omega_1^4 & \dots & \omega_1^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_2^2 & \omega_2^4 & \dots & \omega_2^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{N-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\zeta_1 \omega_1 \\ 2\zeta_2 \omega_2 \\ \vdots \\ 2\zeta_N \omega_N \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

sau prescurtat

$$[\omega^0]\{\gamma\} = \{2\zeta_r \omega_r\}. \quad (4.41)$$

Rezultă

$$\{\gamma\} = [\omega^0]^{-1}\{2\zeta_r \omega_r\} \quad (4.42)$$

de unde se calculează valorile γ_r care verifică relația (4.39).

Din prima relație (4.38) și din (4.39) se obține

$$[C] = [A]^T [c^0] [A] = \sum_{r=1}^{N-1} \gamma_r [A]^T ([A]^{-T} [K] [A]^{-1})^r [A] \quad (4.43)$$

care este unic determinată pe baza valorilor γ_r , calculate din (4.42). Totuși, trebuie reținut că aceasta nu este singura matrice a amortizării proporționale care poate fi obținută din datele experimentale.

Mai trebuie adăugat că, deoarece pentru modurile cu pulsație proprie mai mare ca ω_N s-a considerat $\gamma_s = 0$ ($s = N, N+1, \dots, P-1$), s-a impus ca în aceste moduri modelul analitic să aibe rapoarte de amortizare

$$\zeta_s = \frac{1}{2\omega_s} \sum_{r=0}^{N-1} \gamma_r (\omega_s^2)^r \quad (4.44)$$

de unde, ca și în primul caz, pot rezulta coeficienți negativi de amortizare pentru modurile cu pulsații proprii înalte.

Aplicarea metodei întâmpină greutăți serioase de calcul, datorită necesității inversării matricei $[\omega^0]$, care de obicei este rău condiționată, precum și ridicării la puteri mari a matricei $[K]$.

O metodă care prezintă unele avantaje a fost propusă de Wilson și Penzien [50].

Relațiile de ortogonalitate ale vectorilor modali normalizați se pot scrie

$$\{\Psi^{(s)}\}^T [M] \{\Psi^{(r)}\} = \begin{cases} 1, & r = s, \\ 0, & r \neq s. \end{cases} \quad (4.45)$$

Dacă se face transformarea de coordonate

$$\{Q\} = [M] \{q\}, \quad (4.46)$$

atunci în spațiul coordonatelor $\{Q\}$ vectorii proprii vor fi

$$\{\rho^{(r)}\} = [M] \{\Psi^{(r)}\}. \quad (4.47)$$

Se poate defini o matrice a amortizării care este diagonalizată de vectorul propriu r și reprezintă amortizarea în modul r . Această matrice are forma

$$[C] = \sum_{r=1}^N [C]_r \quad (4.48)$$

unde

$$[C]_r = 2\zeta_r \omega_r \{\rho^{(r)}\} \{\rho^{(r)}\}^T. \quad (4.49)$$

De notat că în acest caz s-a considerat că în toate modurile neincluse în suma (4.48) amortizarea este nulă. Prin aceasta se evită posibilitatea apariției unor coeficienți de amortizare negativi în modurile superioare (nemăsurate) ale structurii.

4.3.5. Modele complete și modele trunchiate

Fără a restringe generalitatea, se consideră un model fizic compus din N mase concentrate, legate între ele prin elemente elastice și disipative, astfel încât mișcarea fiecărei mase să reprezinte mișcarea unui punct semnificativ al structurii. Dacă mișcarea este definită de N coordonate *independente*, modelul are N grade de libertate și deci N pulsații proprii.

În general, numărul de coordonate N diferă de numărul de rezonanțe P din domeniul de pulsații acoperit de măsurări, ceea ce face ca metodele de identificare în domeniul frecvențelor (fig. 4.2) să fie împărțite în două categorii mari.

4.3.5.1. Cazul informației modale complete

Dacă numărul coordonatelor este redus, se pot determina experimental vectorii modali și parametrii modali pentru un număr P de moduri de vibrație, egal cu numărul coordonatelor independente N ale modelului fizic. Deci, dacă $P = N$, din punct de vedere teoretic este posibilă determinarea completă a modelului fizic, pe baza relațiilor (definite pentru sisteme cu amortizare proporțională)

$$[M] = [\Psi]^{-T} [m] [\Psi]^{-1}, \quad (4.50)$$

$$[K] = [\Psi]^{-T} [k] [\Psi]^{-1} = [\Psi]^{-T} [\omega_r^2 m_r] [\Psi]^{-1}, \quad (4.51)$$

$$[C] = [\Psi]^{-T} [c] [\Psi]^{-1} = [\Psi]^{-T} [2\zeta_r \omega_r m_r] [\Psi]^{-1}. \quad (4.52)$$

Într-adevăr, matricea modală $[\Psi]$ este în acest caz o matrice pătrată ($N \times N$), cu elemente măsurate în zonele de rezonanță, deci inversiunea se face fără probleme.

Prin urmare, dacă se urmărește identificarea unui model unic, este necesar ca măsurările în cele N puncte să se facă în vecinătatea celor N pulsații de rezonanță, pentru ca toate modurile proprii de vibrație să fie reprezentate corespunzător în datele experimentale. În caz contrar, după cum s-a mai arătat, rezultă un sistem de ecuații rău condiționate, a căror soluție este foarte sensibilă la mici erori de măsurare.

Chiar în aceste condiții, determinarea matricei masei modale $[m]$ se face în general după o prestructurare a modelului fizic, deci cunoscând $[M]$. Din relațiile (4.51) și (4.52) se calculează apoi elementele matricelor rigidității și amortizării.

Dacă elementele matricelor $[M]$ și $[K]$ se pot calcula direct, pe baza desenului structurii reale, atunci se măsoară modurile de vibrație, masele și amortizările modale, pe baza cărora se calculează elementele matricei $[C]$ din relația (4.52).

4.3.5.2. Cazul informației modale incomplete

De obicei, numărul gradelor de libertate N este mare, iar domeniul de pulsații necesar pentru înregistrarea răspunsului la toate cele N rezonanțe depășește considerabil domeniul pulsațiilor de interes. Când se măsoară $P < N$ rezonanțe, există un număr infinit de modele analitice care descriu răspunsul măsurat, în limitele uzuale ale erorilor experimentale.

Pentru acest caz, Berman și Flannelly [9] au dezvoltat *teoria modelelor incomplete ale structurilor dinamice*, a cărei prezentare depășește cadrul a acestei lucrări. Pe scurt, este vorba de *modele trunchiate*, care au N coordonate independente dar numai P moduri de vibrație.

Relația (4.25) se scrie sub forma

$$[K] = \sum_{r=1}^N \frac{\omega_r^2}{m_r} [M] \{\Psi^{(r)}\} \{\Psi^{(r)}\}^T [M].$$

Dacă $N = P$, modelul este complet și identificarea unică. Dacă $P < N$, se definește matricea

$$[K]_{inc} = \sum_{r=1}^P \frac{\omega_r^2}{m_r} [M] \{\Psi^{(r)}\} \{\Psi^{(r)}\}^T [M],$$

care se poate calcula dacă se cunoaște matricea $[M]$.

Deoarece termenii care conțin valori mari ale pulsației ω_r nu sînt incluși în suma de mai sus, termenii dominanți ai matricei $[K]$ lipsesc, deci matricea $[K]_{inc}$ va diferi de $[K]$, elementele ei neavînd sens fizic.

Matricea $[K]_{inc}$ este singulară (fiind de ordin N dar de rang P), deci nu se poate obține prin inversiune și trebuie formată separat, însumînd $P < N$ termeni. Folosind metoda matricei pseudoinverse [36] rezultă

$$\begin{aligned} [K]_{inc} &= [\Psi]_{inc}^+ [k] [\Psi]_{inc}^+, \\ [M]_{inc} &= [\Psi]_{inc}^+ [m] [\Psi]_{inc}^+, \\ [C]_{inc} &= [\Psi]_{inc}^+ [c] [\Psi]_{inc}^+ \end{aligned} \quad (4.53)$$

unde

$$[\Psi]_{inc}^+ = ([\Psi]_{inc}^T [\Psi]_{inc})^{-1} [\Psi]_{inc}^T$$

iar $[\Psi]_{inc}$ este o matrice modală dreptunghiulară ($N \times P$).

Se recomandă ca P să fie egal cu *numărul de grade de libertate efective* ale structurii. Acesta este egal cu numărul limitat de moduri proprii de vibrație, cu pulsații cuprinse în domeniul acoperit de măsurări și cu contribuție determinantă la răspunsul structurii.

4.3.6. Calculul matricelor pseudoinverse

O problemă care ridică dificultăți de calcul la aplicarea metodelor de identificare este inversarea matricelor dreptunghiulare.

De exemplu, dacă se scrie relația (3.78) pentru N_r pulsații excitatoare $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_{N_r}$, se obține sistemul de ecuații liniare

$$\{\alpha_{jI}\} = [B] \{\chi_{jI}\} \quad (4.54)$$

în care

$$\{\alpha_{j_I}\} = \{\alpha_{j_I}(\bar{\omega}_1) \quad \alpha_{j_I}(\bar{\omega}_2) \quad \dots \quad \alpha_{j_I}(\bar{\omega}_{N_f})\}^T, \quad (4.55)$$

$$\{\chi_{j_I}\} = \{\chi_{j_I}^{(1)} \quad \chi_{j_I}^{(2)} \quad \dots \quad \chi_{j_I}^{(N)}\}^T \quad (4.56)$$

iar

$$[\mathcal{B}] = [\{B_1(\bar{\omega}_f)\} \{B_2(\bar{\omega}_f)\} \dots \{B_N(\bar{\omega}_f)\}] \quad (4.57)$$

este o matrice dreptunghiulară ($N_f \times N$). Matricele $\{\alpha_{j_I}\}$ și $[\mathcal{B}]$ sînt cunoscute (v. § 5.3.4.4) și se caută vectorul $\{\chi_{j_I}\}$.

Dacă $N_f > N$, sistemul (4.54) este incompatibil. Soluția aproximativă care face minimă norma euclidiană a vectorului eroare $\{e\} = \{\alpha_{j_I}\} - [\mathcal{B}]\{\chi_{j_I}\}$ este

$$\{\chi_{j_I}\} = [\mathcal{B}]^+ \{\alpha_{j_I}\}, \quad (4.58)$$

unde

$$[\mathcal{B}]^+ = [[\mathcal{B}]^T [\mathcal{B}]]^{-1} [\mathcal{B}]^T \quad (4.59)$$

este pseudoinversa Moore-Penrose a matricei $[\mathcal{B}]$ (v. și § 5.3.4.5).

În multe aplicații practice, matricea $[[\mathcal{B}]^T [\mathcal{B}]]$ este numeric rău condiționată, deci $[\mathcal{B}]^+$ nu se poate calcula cu relația (4.59). Se recurge la metoda descrisă de Golub și Reinsch [48] bazată pe o descompunere în valori singulare a matricei $[\mathcal{B}]$, de forma

$$[\mathcal{B}] = [X][S][Y]^T, \quad (4.60)$$

unde $[X]$ este o matrice modală ($N_f \times N$) formată din N vectori proprii ortonormalizați, corespunzînd celor mai mari N valori proprii ale matricei $[[\mathcal{B}][\mathcal{B}]^T]$ iar $[Y]$ este matricea modală ($N \times N$) a matricei $[[\mathcal{B}]^T [\mathcal{B}]]$.

Matricele $[X]$ și $[Y]$ sînt ortonormalizate, adică

$$[X]^T [X] = [Y]^T [Y] = [Y][Y]^T = [I], \quad (4.61)$$

unde $[I]$ este matricea unitate.

Elementele matricei diagonale $[S]$ sînt rădăcinile pătrate nenegative ale valorilor proprii ale matricei $[[\mathcal{B}]^T [\mathcal{B}]]$ și se numesc *valori singulare*

$$[S] = \text{diag}(s_1; s_2; \dots; s_P; s_{P+1}; \dots; s_N), \quad (4.62)$$

unde P este rangul matricelor $[\mathcal{B}]$, respectiv $[[\mathcal{B}]^T [\mathcal{B}]]$.

Dacă $P < N$, atunci $s_{P+1} = s_{P+2} = \dots = s_N = 0$.

Utilizînd transformări de forma

$$\{\chi_{j_I}\} = [Y]\{\chi^0\}, \quad \{\alpha_{j_I}\} = [X]\{\alpha^0\}, \quad (4.63)$$

din relațiile (4.58), (4.59) și (4.61) rezultă că

$$[\mathcal{B}]^+ = [Y][S]^+[X]^T \quad (4.64)$$

unde

$$[S]^+ = \text{diag}(s_i^+) \quad (4.65)$$

iar

$$s_i^+ = \begin{cases} s_i^{-1} & \text{pentru } s_i > 0, \\ 0 & \text{pentru } s_i = 0. \end{cases} \quad (4.66)$$

O tratare completă a problemei se face în cărțile lui Boullion și Odell*, Rao și Mitra** și Albert***. De asemenea, o metodă de calcul numeric al matricelor pseudoinverse este descrisă de Ionescu și Lupăș****

* Boullion, T., Odell, P., *Generalized Inverse Matrices*, Wiley (Interscience), New York 1971.

** Rao, C. R., Mitra, S. K., *Generalized Inverse of Matrices and Its Application*, Wiley, New York, 1971.

*** Albert, A., *Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse*, Academic Press, New York, London, 1972.

**** Ionescu, Vl. și Lupăș, L., *Tehnici de calcul în teoria sistemelor, I. Sisteme liniare* Editura tehnică, București, 1974 (p. 54).

Identificarea sistemelor liniare folosind excitație armonică într-un punct

5.1. Principiul metodelor de identificare cu excitație într-un punct

În cazul amortizării proporționale, receptanța complexă a unui sistem cu N grade de libertate și amortizare histeretică (3.56) are forma unei sume de fracții, fiecare reprezentând răspunsul într-un singur mod de vibrație

$$\bar{\alpha}_{jl} = \frac{\tilde{q}_j}{\hat{f}_l} = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_l^{(r)} \Psi_j^{(r)}}{k_r - \omega^2 m_r \pm i h_r} \quad (5.1)$$

Experimental, sistemul este solicitat de o forță $f_l = \hat{f}_l e^{i\omega t}$ aplicată în punctul l (corespunzător coordonatei generalizate q_l) și se măsoară răspunsul $q_j = \tilde{q}_j e^{i\omega t}$ în punctul j (corespunzător coordonatei generalizate q_j) la diferite pulsații excitatoare ω . Se calculează receptanța complexă

$$\bar{\alpha}_{jl} = \frac{q_j}{f_l} = \alpha_{jl} e^{i\varphi} = \alpha_{jR} + i\alpha_{jI} \quad (5.2)$$

care de obicei se reprezintă grafic, sub una din următoarele forme : a) ca diagrame amplitudine-pulsație ($\alpha_{jR} - \omega$) și fază-pulsație ($\varphi - \omega$) ; b) ca diagrame de variație cu pulsația a componentei răspunsului în fază cu forța ($\alpha_{jR} - \omega$) și a componentei răspunsului în cvadratură cu forța ($\alpha_{jI} - \omega$) ; c) ca diagramă polară, reprezentând locul geometric al extremității vectorului $\bar{\alpha}_{jl}$ în planul complex, avînd ca parametru pulsația ω .

Atunci cînd, în timpul baleiajului, pulsația excitatoare se apropie de valoarea $\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}$, contribuția termenului r la expresia lui $\bar{\alpha}_{jl}$ devine predominantă, iar variația acestui termen cu pulsația corespunde comportării în vecinătatea rezonanței a unui sistem echivalent, cu un singur grad de libertate, avînd parametrii m_r , k_r și h_r .

Răspunsul în modul r se suprapune peste ceilalți termeni ai sumei (5.1). Diferitele metode de analiză a răspunsului în frecvență diferă în primul rînd prin ipotezele ce se fac asupra contribuției modurilor de vibrație „nerezonante” la răspunsul total în vecinătatea unei rezonanțe și prin procedeul de separare a modurilor de vibrație, cînd acestea au pulsații proprii apropiate.

În general, se urmărește determinarea următoarelor mărimi :
 a) pulsațiile de rezonanță, care se consideră egale cu pulsațiile proprii ω_r ale sistemului conservativ asociat ; b) parametrii modali ζ_r sau g_r , m_r și k_r ; c) deplasările modale $\Psi_j^{(r)}$, deci matricea modală $[\Psi]$. Pe baza acestora se calculează apoi matricele $[M]$, $[K]$, $[C]$ sau $[H]$.

În toate cazurile este absolut necesară repetarea măsurărilor cu vibratorul plasat în diferite puncte ale structurii, pentru a ne asigura că toate modurile importante au fost excitate. De asemenea, se aleg punctele de măsurare a răspunsului în care se obține un raport maxim semnal/zgomot.

Concluzii similare se desprind și din analiza răspunsului sistemelor cu amortizare neproportională. În acest caz însă, dificultatea măsurării formei modurilor de distorsiune sau a modurilor complexe de vibrație, impune determinarea lor prin calcul, deci folosirea unor metode combinate analitico-experimentale, în care un rol principal îl joacă folosirea calculatoarelor numerice.

5.2. Identificarea sistemelor neamortizate

Se prezintă metodele de identificare folosite în cazul sistemelor cu amortizare neglijabilă — șasiuri, traverse, batiuri — sau în cazul sistemelor amortizate — la măsurări în afara zonelor de rezonanță.

5.2.1. Forma curbelor de răspuns în frecvență

Soluția staționară a ecuațiilor de mișcare ale unui sistem neamortizat cu N grade de libertate, solicitat de forțe armonice în fază, are forma (3.24)

$$\{\hat{q}\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \{\Psi^{(r)}\}}{k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)}. \quad (5.3)$$

În cazul excitației într-un singur punct, receptanța în punctul de solicitare este

$$\alpha_{ii} = \frac{\hat{q}_i}{\hat{f}_i} = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_i^{(r)} \Psi_i^{(r)}}{k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)} = \sum_{r=1}^N \frac{x_{ii}^{(r)}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}} \quad (5.4)$$

iar receptanța de transfer este

$$\alpha_{jl} = \frac{\hat{q}_j}{\hat{f}_l} = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_l^{(r)} \Psi_j^{(r)}}{k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)} = \sum_{r=1}^N \frac{x_{jl}^{(r)}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}. \quad (5.5)$$

Cantitatea $x_{ii}^{(r)} = \frac{\Psi_i^{(r)} \Psi_i^{(r)}}{k_r}$ este totdeauna pozitivă. În schimb, $x_{jl}^{(r)} = \frac{\Psi_l^{(r)} \Psi_j^{(r)}}{k_r}$ este pozitivă când punctele j și l se mișcă în fază, și negativă — când aceste puncte se mișcă în antifază.

Pentru motive ce vor fi explicate ulterior, se preferă folosirea curbelor mobilității și impedanței mecanice.

Expresia mobilității în punctul de solicitare este

$$\mathcal{M}_{ii} = \frac{\hat{q}_i}{\hat{f}_i} = \omega \alpha_{ii} = \sum_{r=1}^N x_{ii}^{(r)} \frac{\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}, \quad (5.6)$$

iar mobilitatea de transfer

$$\mathcal{M}_{ji} = \frac{\hat{q}_j}{\hat{f}_i} = \omega \alpha_{ji} = \sum_{r=1}^N x_{ji}^{(r)} \frac{\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}. \quad (5.7)$$

Calculînd derivata în raport cu ω a termenului general din expresia (5.7) se obține

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega x_{ji}^{(r)}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}} \right) = x_{ji}^{(r)} \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right) - \omega \left(-\frac{2\omega}{\omega_r^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2} = x_{ji}^{(r)} \frac{1 + \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2},$$

deci semnul derivatei depinde de semnul lui $x_{ji}^{(r)}$.

Panta diagramei mobilității directe (fig. 5.1 a) este totdeauna pozitivă, curba avînd salturi de la $+\infty$ la $-\infty$ în dreptul pulsațiilor de rezonanță (teorema lui Foster) [38].

Între două pulsații de rezonanță există totdeauna o pulsație de antirezonanță și invers.

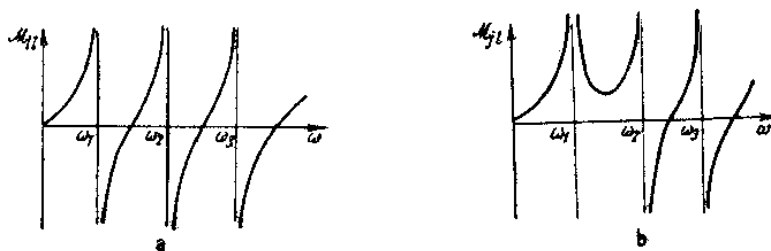


Fig. 5.1

Curba mobilității de transfer (fig. 5.1 b) are o alură diferită, datorită existenței termenilor $x_{ji}^{(r)}$ negativi în expresia (5.7). Astfel, panta diagramei putînd fi și negativă, între două pulsații de rezonanță poate apare un minim, fără ca mobilitatea să se anuleze.

Pentru explicarea acestor particularități ale diagramelor mobilității, se consideră numai doi termeni din sumele (5.6) și (5.7), care se notează simplificat

$$\mathcal{M}_1 = \frac{x_1 \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}, \quad \mathcal{M}_2 = \frac{x_2 \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}, \quad (5.8)$$

unde $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

În figura 5.2 a s-a reprezentat variația cu pulsația a expresiilor M_1 (linie continuă) și M_2 (linie întreruptă), iar în figura 5.2 b, diagramele funcțiilor M_1 (linie continuă) și $(-M_2)$ (linie întreruptă). În continuare, în figura 5.2 c s-a reprezentat funcția $(M_1 + M_2)$ iar în figura 5.2 d funcția

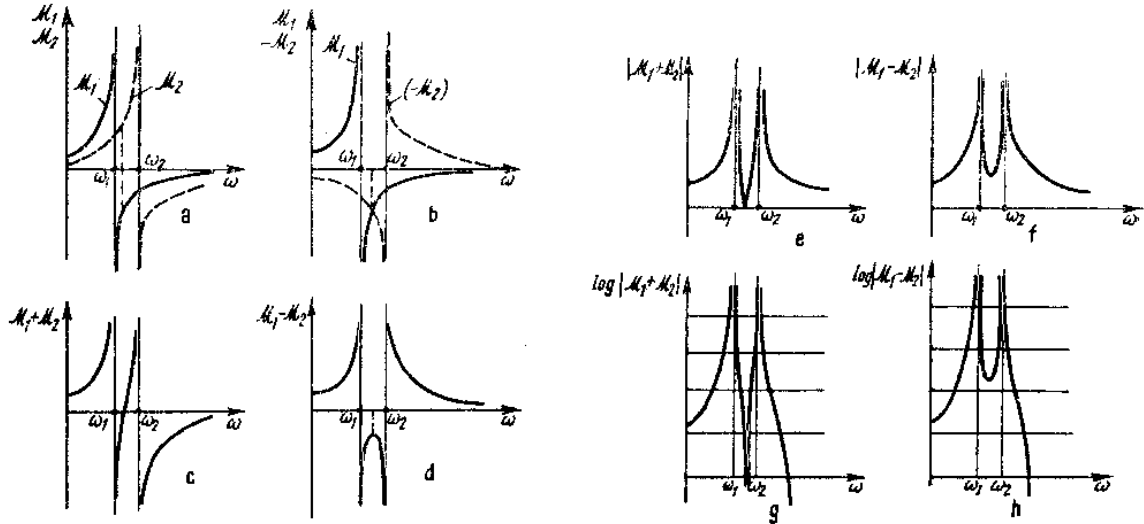


Fig. 5.2

$(M_1 - M_2)$. În figurile 5.2 e și f s-au reprezentat graficele modulelor acestor funcții, iar în figurile 5.2 g și h, diagramele corespunzătoare în coordonate logaritmice.

Rezultă clar avantajul reprezentării diagramelor amplitudine-pulsație în coordonate logaritmice (sau cel puțin semilogaritmice), pe care se pun în evidență cel mai bine antirezonanțele.

În afara zonelor de rezonanță și antirezonanță, curba de răspuns poate fi aproximată cu o „diagramă schelet”, formată din linii drepte care definesc răspunsul unei mase pure sau al unui element pur elastic (șimilare asimptotelor la diagramele Bode).

Dintre cele trei reprezentări ale răspunsului unui sistem în punctul de acționare, sub formă de diagramă a receptanței directe (fig. 5.3 a), a

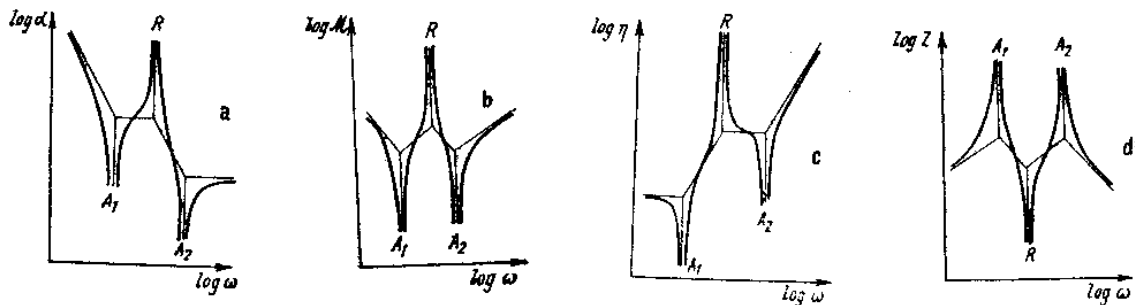


Fig. 5.3

mobilității directe (fig. 5.3 b) sau a inertanței directe (fig. 5.3 c), se preferă diagrama mobilității, datorită „simetriei”. Ea este formată din linii cu pante de ± 20 dB/octavă (pante ± 1 în cazul scărilor egale), astfel că „scheletul” este mai ușor de construit.

De asemenea, se folosește diagrama impedanței mecanice directe (fig. 5.3 d), pe care antirezonanțele apar ca maxime, iar rezonanțele ca minime.

5.2.2. Metoda diagramelor „schelet”

Trasînd curba mobilității sau impedanței mecanice directe pe hîrtie cu carioaj special, fiecărui segment al diagramei schelet i se poate determina valoarea corespunzătoare a masei m' sau a constantei elastice k' a elementelor care au același răspuns în frecvență (fig. 5.4).

La intersecția unei linii k' cu o linie m' , pulsația de rezonanță ω_R sau pulsația de antirezonanță ω_A au valoarea $\sqrt{\frac{k'}{m'}}$.

Pentru diagrama schelet din figura 5.4 rezultă deci

$$k'_3 = \omega_{A3}^2 m'_2 = \frac{\omega_{A3}^2}{\omega_{R2}^2} k'_2 = \left(\frac{\omega_{A3} \omega_{A2}}{\omega_{R2}} \right)^2 m'_1 = \left(\frac{\omega_{A3} \omega_{A2}}{\omega_{R2} \omega_{R1}} \right)^2 k'_1 = \left(\frac{\omega_{A3} \omega_{A2} \omega_{A1}}{\omega_{R2} \omega_{R1}} \right)^2 m'_0. \quad (5.9)$$

De asemenea, pentru oricare două rezonanțe sau antirezonanțe succesive (fig. 5.5), se stabilesc relațiile

$$\frac{\omega_{R2}}{\omega_{R1}} = \frac{M_I}{M_A}, \quad \frac{\omega_{A2}}{\omega_{A1}} = \frac{M_R}{M_I} \quad (5.10)$$

unde M_I este mobilitatea punctului I obținut prin construcțiile grafice din figurile 5.5.

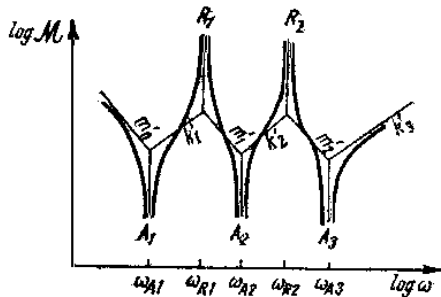


Fig. 5.4

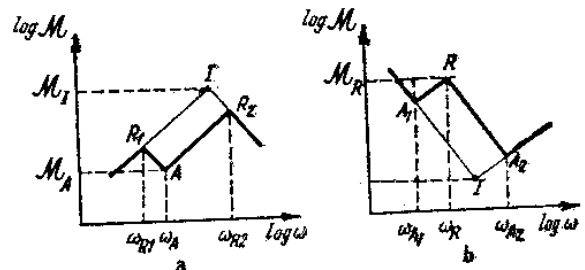


Fig. 5.5

Pentru cîteva diagrame schelet cu configurație simplă, în tabela 5.1 se dau modelele fizice corespunzătoare și relațiile pentru calculul parametrilor acestor modele.

După cum rezultă din tabelă, identificarea nu este unică nici prin această metodă, pentru o aceeași diagramă existînd modele corespondente cu structuri diferite.

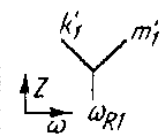
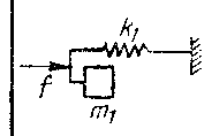
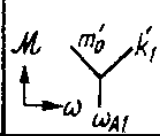
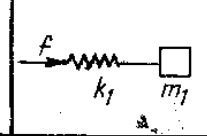
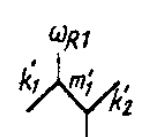
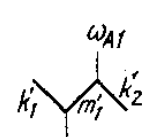
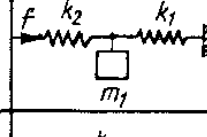
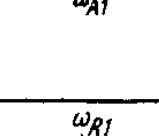
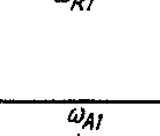
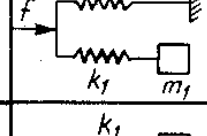
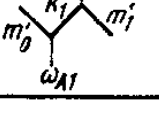
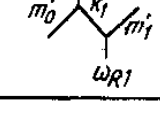
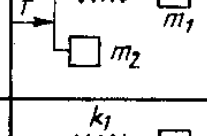
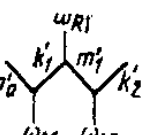
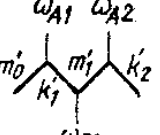
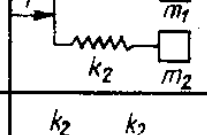

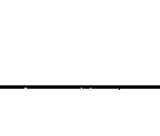
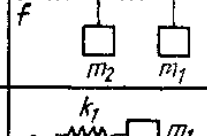
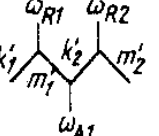

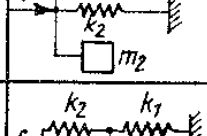

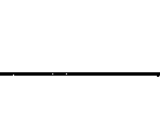
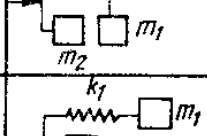
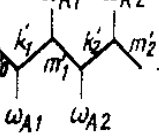
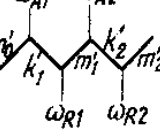
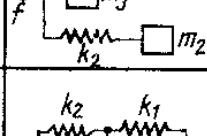


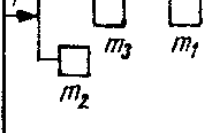
La structurarea modelelor și stabilirea relațiilor de calcul a parametrilor acestora sînt utile următoarele observații :

a — Pulsațiile de rezonanță ale unui sistem nu depind de constanta elastică a unui arc montat între punctul de solicitare și restul sistemului.

Astfel, la sistemul nr. 3, pulsația $\omega_{R1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ este independentă de k_2 , iar

la sistemul nr. 7, pulsația $\omega_{R1} = \sqrt{k_1 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$ este independentă de k_2 .

Tabela 5.1.

Nr.	Diagrama mobilității directe	Diagrama impedenței mecanice directe	Cantități determinate experimental	Modelul fizic	Valorile parametrilor modelului fizic
1			k_i' m_i' ω_{R1}		$m_1 = m_i'$ $k_1 = \omega_{R1}^2 m_i'$
2			m_o' k_i' ω_{A1}		$k_1 = k_i'$ $m_1 = \frac{k_i'}{\omega_{A1}^2}$
3			k_2' ω_{R1} ω_{A1}		$k_2 = k_2'$ $k_1 = m_i \omega_{R1}^2$ $m_1 = \frac{k_2}{\omega_{A1}^2 - \omega_{R1}^2}$
4			k_1' k_2' ω_{A1}		$k_2 = k_1'$ $k_1 = k_2' - k_2$ $m_1 = \frac{k_1}{\omega_{A1}^2}$
5			m_i' m_o' ω_{A1}		$m_2 = m_i'$ $m_1 = m_o' - m_2$ $k_1 = m_1 \omega_{A1}^2$
6			k_2' ω_{A1}, ω_{A2} ω_{R1}		$k_1 = \omega_{A1}^2 m_1 = \frac{\omega_{R1}^2 - \omega_{A1}^2}{\omega_{A2}^2 - \omega_{A1}^2} k_2'$ $k_2 = \omega_{A2}^2 m_2 = \frac{\omega_{A2}^2 - \omega_{R1}^2}{\omega_{A2}^2 - \omega_{A1}^2} k_2'$
7			k_2' ω_{A1}, ω_{A2} ω_{R2} m_o'		$k_2 = k_2'$ $m_2 = \frac{k_2'}{\omega_{A1}^2 + \omega_{A2}^2 - \omega_{R1}^2}$ $m_1 = m_o' - m_2$ $k_1 = \frac{\omega_{R2}^2 m_1 m_2}{m_o'}$
8			k_1', m_2' ω_{R1}, ω_{R2} ω_{A1}		$k_2 = k_1'$ $m_2 = m_2'$ $k_1 = (\omega_{R1}^2 + \omega_{R2}^2 - \omega_{A1}^2) m_2 - k_2$ $m_1 = \frac{k_1}{\omega_{A1}^2}$
9			m_2', k_1' ω_{R1}, ω_{R2} ω_{A1}		$m_2 = m_2'$ $k_2 = (\omega_{R1}^2 + \omega_{R2}^2 - \omega_{A1}^2) m_2$ $k_1 = \frac{k_2 k_1'}{k_2 - k_1'}$ $m_1 = \frac{k_1 + k_2}{\omega_{A1}^2}$
10			m_2' ω_{R1}, ω_{R2} ω_{A1}, ω_{A2}		$m_3 = m_2'$ $k_1 = \omega_{A1}^2 m_1 = m_2' \frac{(\omega_{R1}^2 - \omega_{A1}^2)(\omega_{R2}^2 - \omega_{A1}^2)}{\omega_{A2}^2 - \omega_{A1}^2}$ $k_2 = \omega_{A2}^2 m_2 = m_2' \frac{(\omega_{A2}^2 - \omega_{R1}^2)(\omega_{R2}^2 - \omega_{A2}^2)}{\omega_{A2}^2 - \omega_{A1}^2}$
11			m_2' ω_{R1}, ω_{R2} ω_{A1}, ω_{A2}		$m_2 = m_2'$ $k_2 = (\omega_{R1}^2 + \omega_{R2}^2 - \omega_{A1}^2 - \omega_{A2}^2) m_2$ $m_3 = \frac{m_2}{\omega_{A1}^2 + \omega_{A2}^2 - \frac{m_2}{k_2} (\omega_{R1}^2 \omega_{R2}^2 - \omega_{A1}^2 \omega_{A2}^2)}$ $m_1 = m_o' - m_2 - m_3$ $k_1 = \frac{\omega_{A1}^2 \omega_{A2}^2 m_1 m_3}{k_2}$

b — Pulsațiile de antirezonanță nu depind de elementele legate în paralel cu subsisteme a căror impedanță directă devine infinită la aceste pulsații.

Astfel, la sistemul nr. 4, $\omega_{A1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, iar constanta elastică k_2 este „inactivă”. La sistemul nr. 5, $\omega_{A1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ deoarece masa m_2 este „inactivă”. La sistemul nr. 8, $\omega_{A1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, elementele m_2 și k_2 fiind inactive.

La sistemul nr. 9, $\omega_{A1} = \sqrt{\frac{1}{m_1}(k_1 + k_2)}$ căci m_2 este inactivă.

c — Pentru sisteme legate de un reper fix, răspunsul la pulsații foarte joase este de tip k' , iar la sisteme nelegate de un reper fix este de tip m' . Astfel, la sistemul nr. 9, $k'_1 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$, iar la sistemul nr. 11, $m'_0 = m_1 + m_2 + m_3$.

d — La pulsații foarte înalte, răspunsul este de tip m' dacă există o masă atașată direct de punctul de solicitare, și de tip k' — dacă excitația nu se face prin masă.

Astfel, la sistemele nr. 8, 9 și 11, $m'_2 = m_2$, la sistemul nr. 10, $m'_2 = m_3$ iar la sistemele nr. 3 și 7, $k'_2 = k_2$.

În cartea lui Salter [106] se indică o metodă de structurare prin tatonări a modelelor fizice care descriu răspunsul unor structuri continue, pe domenii limitate de frecvențe.

5.2.3. Metoda modelului modal

Dacă în timpul încercărilor structura este rezemată liber pe o suspensie foarte elastică și de amortizare neglijabilă, relația (5.4) se scrie

$$\alpha_{ll} = \frac{\hat{q}_l}{\hat{f}_l} = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_l^{(r)} \Psi_l^{(r)}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} - \frac{1}{\omega^2 M_{ll}} \quad (5.11)$$

Termenul suplimentar din membrul drept se datorește mișcării de corp rigid a structurii pe suspensia elastică. Parametrul constant M_{ll} depinde de masa totală a structurii, de momentul de inerție masic al acesteia și de poziția punctului l față de centrul de greutate.

Pe baza diagramei răspunsului în frecvență $\alpha_{ll} - \omega$ determinată experimental, se obțin direct pulsațiile de rezonanță ω_r și cele de antirezonanță ω_{Ar} .

Davis [28] recomandă normalizarea modurilor de vibrație prin egalarea tuturor maselor modale cu masa totală a structurii. În acest caz, evaluând expresia (5.11) la fiecare pulsație de antirezonanță, deci unde $\alpha_{ll} = 0$, se obține sistemul de ecuații

$$\sum_{r=1}^N \frac{\Psi_l^{(r)} \Psi_l^{(r)}}{\omega_r^2 - \omega_{Ar}^2} = \frac{m_r}{\omega_{Ar}^2 M_{ll}} \quad (5.12)$$

(unde ω_{Ar} este pulsația de antirezonanță imediat inferioară pulsației de rezonanță ω_r), din care se determină $\Psi_i^{(r)}$.

Cantitatea $\frac{m_r}{M_{II}}$ din membrul drept se calculează cîntărind structura (dacă este posibil) și determinîndu-i răspunsul liber, în cazul rezemării pe arcuri etalonate.

Odată măsurați coeficienții modali $\Psi_i^{(r)}$ în punctul de solicitare, ceilalți coeficienți se determină vibrînd structura la fiecare rezonanță, astfel încît răspunsul să fie dominat doar de modul corespunzător de vibrație. Cînd efectuarea măsurărilor la rezonanță se consideră periculoasă pentru integritatea structurii, se recurge la metode bazate pe măsurări în vecinătatea rezonanței, de tipul celor descrise în § 5.3.

5.3. Identificarea sistemelor cu amortizare proporțională

5.3.1. Moduri de vibrație cu pulsații proprii relativ apropiate

Pentru a înțelege mai bine dificultățile ce apar la analiza grafică a curbelor de răspuns în frecvență ale sistemelor cu mai multe grade de libertate, se va analiza cazul existenței simultane a două moduri de vibrație cu pulsații proprii relativ apropiate.

Dacă se notează prescurtat $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}$, receptanța de transfer complexă (5.1) se scrie

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = \frac{x_1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + ig_1} + \frac{x_2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} + ig_2} \quad (5.13)$$

unde

$$x_1 = \frac{\Psi_i^{(1)} \Psi_j^{(1)}}{k_1} = \frac{1}{k_1} \frac{\partial q_i}{\partial p_1} \frac{\partial q_j}{\partial p_1}, \quad x_2 = \frac{\Psi_i^{(2)} \Psi_j^{(2)}}{k_2} = \frac{1}{k_2} \frac{\partial q_i}{\partial p_2} \frac{\partial q_j}{\partial p_2} \quad (5.14)$$

sînt cantități reale.

Receptanța complexă (5.13) se poate exprima în una din următoarele forme :

$$\bar{\alpha} = \alpha e^{i\varphi} = \alpha_R + i\alpha_I, \quad (5.15)$$

unde

$$\alpha_R = x_1 \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + g_1^2} + x_2 \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)^2 + g_2^2} = \alpha_{R_1} + \alpha_{R_2}, \quad (5.16)$$

$$\alpha_I = x_1 \frac{-g_1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + g_1^2} + x_2 \frac{-g_2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)^2 + g_2^2} = \alpha_{I_1} + \alpha_{I_2},$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha_R^2 + \alpha_I^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\alpha_I}{\alpha_R}. \quad (5.17)$$

Se mai folosește notațiile

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_{R_1}^2 + \alpha_{I_1}^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\alpha_{R_2}^2 + \alpha_{I_2}^2}, \quad (5.18)$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\alpha_{I_1}}{\alpha_{R_1}}, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{\alpha_{I_2}}{\alpha_{R_2}}$$

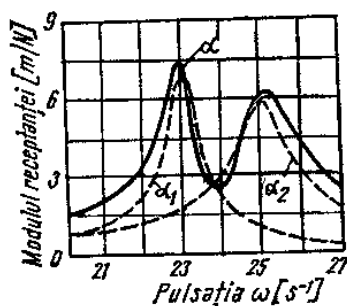


Fig. 5.6

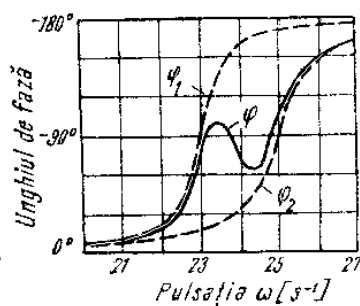


Fig. 5.7

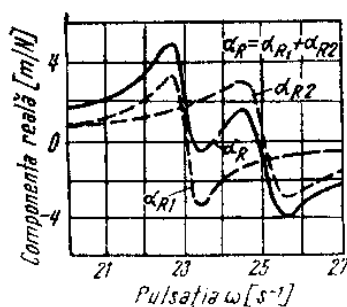


Fig. 5.8

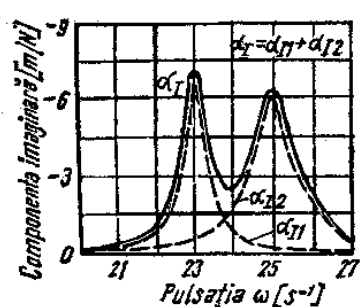


Fig. 5.9

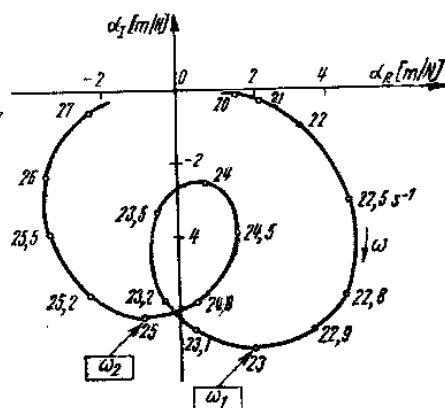


Fig. 5.10

În figurile 5.6—5.10 se prezintă curbele corespunzătoare de răspuns în frecvență, calculate pentru $x_1 = 0,2 \frac{m}{N}$, $x_2 = 0,3 \frac{m}{N}$, $g_1 = 0,03$, $g_2 = 0,05$, $\omega_1 = 23 \text{ s}^{-1}$ și $\omega_2 = 25 \text{ s}^{-1}$. Cu linii întrerupte s-au trasat diagramele pentru fiecare mod izolat iar cu linie continuă — diagramele rezultante [39].

Se observă că atât maximele curbei amplitudinii totale (fig. 5.6) cât și punctele de ordonată nulă ale diagramei componentei reale (fig. 5.8) sau cele de ordonată (-90°) ale diagramei unghiului de fază (fig. 5.7) au abscise care nu mai corespund cu pulsațiile proprii ale celor două moduri considerate. În schimb, maximele diagramei componentei imaginare a receptanței (fig. 5.9) și într-o măsură mai mică punctele de inflexiune ale diagramei componentei reale (fig. 5.8) și a defazajului (fig. 5.7) au abscise foarte apropiate de pulsațiile ω_1 și ω_2 . Localizarea acestora în figura 5.9 este facilitată și de forma „ascuțită” a curbei ($\alpha_I - \omega$) în zona rezonanțelor, unde lățimea benzii de trecere este mai mică decât cea a diagramei ($\alpha - \omega$).

De asemenea, se remarcă faptul că la rezonanță, ordonata diagramei componentei imaginare totale este foarte apropiată de cea a componentei imaginare a modului rezonant.

Diagrama polară (fig. 5.10) are două porțiuni aproape circulare în vecinătatea pulsațiilor ω_1 și ω_2 , unite printr-o buclă corespunzătoare antirezonanței. Intersecția cu semi-axa imaginară negativă nu mai dă pulsațiile de rezonanță. Acestea corespund punctelor în care componenta imaginară α_I are valori maxime și zonei în care unor creșteri egale $\Delta\omega$ ale pulsației, le corespund arce de curbă de lungime maximă.

În figura 5.11 se prezintă diagrama polară a receptanței complexe (5.13), calculată pentru două pulsații proprii mai apropiate între ele, $\omega_1 = 23 \text{ s}^{-1}$ și $\omega_2 = 23,6 \text{ s}^{-1}$, ceilalți parametri fiind aceiași ca pentru diagramele din figurile 5.6—5.10 [39]. Diagrama este compusă tot din două porțiuni aproape circulare, însă bucla de legătură lipsește, antirezonanța fiind mai puțin pronunțată. Și în acest caz, pulsațiile de rezonanță se localizează în zonele unde creșterilor egale $\Delta\omega = 0,1 \text{ s}^{-1}$ ale pulsației le corespund distanțe maxime între puncte.

Pentru comparație, în figura 5.12 se prezintă diagrama polară a receptanței complexe (5.13) calculată pentru două valori relativ diferite

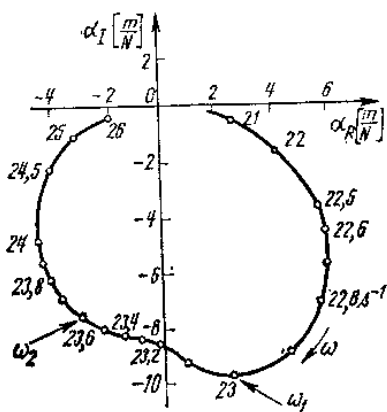


Fig. 5.11

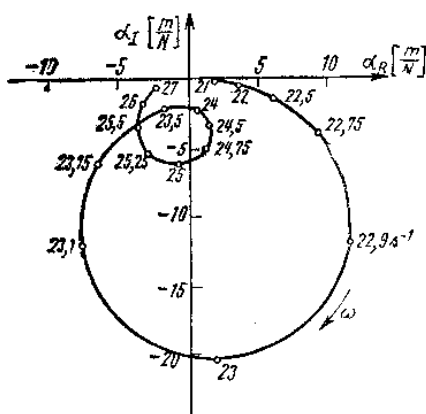


Fig. 5.12

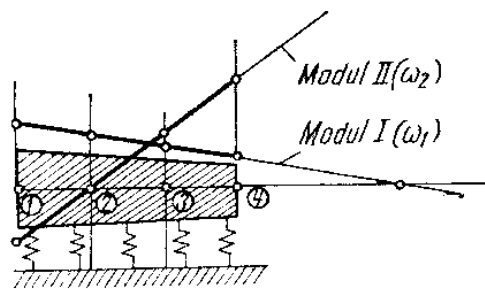


Fig. 5.13

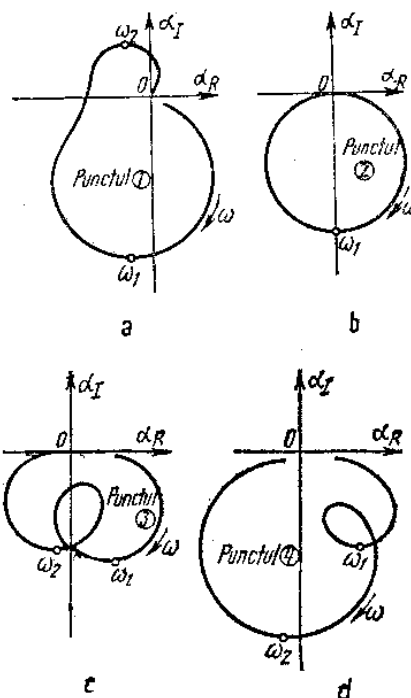


Fig. 5.14

ale factorului de amortizare histeretică $g_1 = 0,01$ și $g_2 = 0,05$, restul parametrilor fiind aceiași ca pentru figura 5.10. Diferența între nivelul amortizării celor două moduri componente duce la formarea a două bucle care aproximează cercuri de diametre diferite.

Pentru un corp rigid, rezemat elastic, care execută vibrații într-un singur plan, în figura 5.13 s-a desenat forma celor două moduri de vibrație. În figura 5.14 s-a schițat forma diagramelor polare măsurate în patru puncte diferite ale corpului.

Figura 5.14 *a* indică faptul că în punctul ① mișcările în cele două moduri se fac în antifază, astfel că pe diagrama polară apare o buclă în semiplanul imaginar pozitiv. Punctul ② fiind ales chiar nod de vibrație al modului II, vibrația în acest punct are loc doar în modul I, diagrama polară fiind circulară (fig. 5.14 *b*). În punctele ③ și ④, deplasările în cele două moduri sînt în fază, contribuția fiecărui mod la răspunsul total fiind diferită, astfel că diagramele din figurile 5.14 *c* și *d* au câte o buclă pentru fiecare mod de vibrație, dar alură diferită.

O situație cu totul specială poate apare în cazul existenței simultane a trei moduri de vibrație cu pulsații proprii relativ apropiate, dintre care unul este „ascuns”. Kennedy și Pancu [61] au considerat cazul funcției

$$\bar{\alpha} = \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2} + ig_j}, \quad (5.19)$$

unde $x_1 = 0,2 \frac{m}{N}$, $x_2 = -0,075 \frac{m}{N}$, $x_3 = 0,3 \frac{m}{N}$, $g_1 = g_2 = 0,03$, $g_3 = 0,05$, $\omega_1 = 23,33 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 24,16 \text{ s}^{-1}$, $\omega_3 = 25 \text{ s}^{-1}$.

Diagrama polară a receptanței complexe (5.19) este prezentată în figura 5.15. Forma diagramei este asemănătoare celei din figura 5.10 (cu diferența că bucla intermediară este ceva mai mare) deci s-ar putea interpreta ca rezultind din suprapunerea a numai două moduri cu pulsații proprii apropiate.

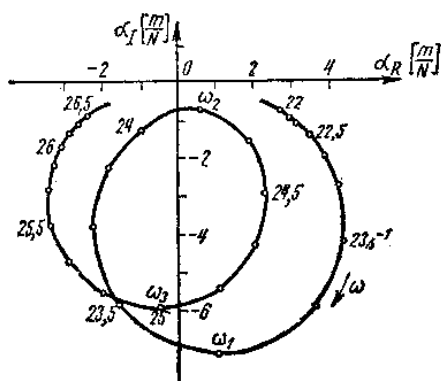


Fig. 5.15

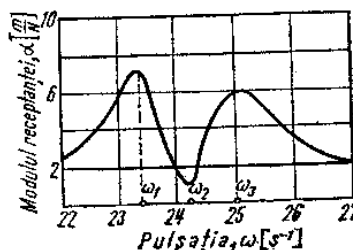


Fig. 5.16

Diagrama modulului funcției (5.19) are doar două maxime (fig. 5.16), la fel și diagrama componentei imaginare (fig. 5.17). În schimb, diagrama variației cu pulsația a cantității $ds/d\omega$, unde ds este arcul de curbă cores-

punzător unei variații $d\omega$ a pulsației, are forma din figura 5.18, cu trei maxime care permit descoperirea celor trei pulsații de rezonanță, deci identificarea a trei moduri de vibrație.

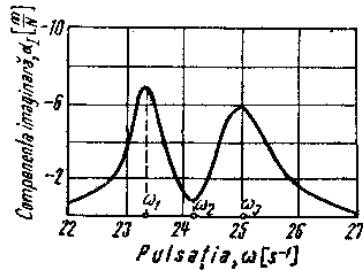


Fig. 5.17

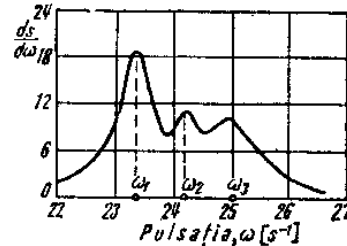


Fig. 5.18

5.3.2. Metode de identificare pe baza diagramei amplitudinii totale a răspunsului

În general, diagrama amplitudine-pulsație are câte un maxim în zona fiecărei pulsații proprii a sistemului.

Localizarea rezonanțelor se face pe baza criteriului amplitudinii maxime. Se consideră că abscisele punctelor în care răspunsul total are amplitudine maximă sînt egale cu pulsațiile proprii ω_r ale sistemului conservativ asociat (fig. 5.19).

Calculul *parametrilor modali* și al *vectorilor modali* se face diferit, în funcție de apropierea relativă a pulsațiilor proprii.

a) La *sisteme cu pulsații proprii relativ depărtate* se consideră că în vecinătatea rezonanțelor vibrația are loc exclusiv în modul de vibrație rezonant. Porțiunile corespunzătoare ale diagramei se asimilează cu curba de răspuns a sistemului cu un grad de libertate (v. cap. 3). Amortizarea se calculează cu formula

$$g_r = \frac{\omega_r'^2 - \omega_r''^2}{2\omega_r^2} = \frac{\omega_r'^2 - \omega_r''^2}{\omega_r'^2 + \omega_r''^2} \quad (5.20)$$

unde ω_r' și ω_r'' sînt pulsațiile punctelor de semiputere, la care amplitudinea răspunsului este $\frac{1}{\sqrt{2}}$ din valoarea maximă la rezonanță (fig. 5.19).

Masele modale se calculează cu relația

$$m_r = \frac{1}{\omega_r^2 g_r \alpha_{jl}(\omega_r)} \quad (5.21)$$

Vectorii modali au elemente proporționale cu receptanțele măsurate la pulsațiile ω_r

$$\frac{\Psi_j^{(r)}}{\Psi_{j,\max}^{(r)}} = \frac{\alpha_{jl}(\omega_r)}{\alpha_{jl}(\omega_r)_{\max}} \quad (5.22)$$

Rusu și Rozsa* au aplicat cu succes principiul acestei metode la identificarea structurală a unui strung carusel.

* Rusu, St., Rozsa, Fr., *Metoda descompunerilor succesive la identificarea structurală a mașinilor unelte*, Lucrările celei de-a doua Conferințe Naționale de Mașini Unelte, București, 27–28 dec. 1976, p. 13–22.

b) La sisteme cu pulsații proprii relativ apropiate dar cu amortizare redusă, un calcul mai exact se face considerînd constantă contribuția modurilor de vibrație nerezonante la amplitudinea răspunsului total în vecinătatea unui maxim de rezonanță. Aplicarea metodei lui Gladwell [47] necesită cunoașterea coordonatelor a trei puncte pe fiecare maxim de rezonanță (fig. 5.20) dintre care unul — punctul de amplitudine maximă.

În vecinătatea pulsației ω_r , ecuația curbei de răspuns se poate scrie sub forma

$$\alpha_{jl} = \frac{1}{k_r \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + g_r^2}} + \xi_r, \quad (5.23)$$

unde ξ_r este contribuția constantă a modurilor nerezonante.

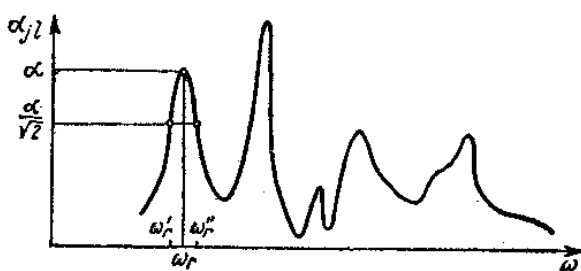


Fig. 5.19

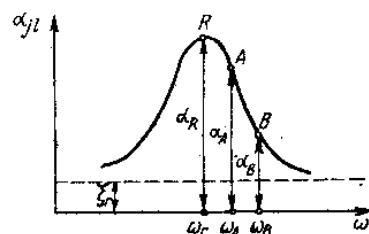


Fig. 5.20

Dacă se notează

$$\alpha_{jl}(\omega_A) = \alpha_A, \quad \alpha_{jl}(\omega_B) = \alpha_B, \quad \alpha_{jl}(\omega_r) = \alpha_R,$$

$$\frac{\alpha_R - \alpha_A}{\alpha_A - \alpha_B} = \sigma, \quad \frac{\omega_B^2 - \omega_r^2}{\omega_A^2 - \omega_r^2} = \tau, \quad \frac{\alpha_B - \xi_r}{\alpha_A - \alpha_B} = \delta, \quad (5.24)$$

rezultă

$$[2\sigma(\tau^2 - 1) - 2]\delta^3 + [(\sigma^2 + 2\sigma)(\tau^2 - 1) - 4\sigma - 5]\delta^2 - 2(\sigma + 1)(\sigma + 2)\delta - (\sigma + 1)^2 = 0. \quad (5.25)$$

Alegînd $\sigma = 1$, adică $\alpha_A = \frac{\alpha_R + \alpha_B}{2}$, ecuația (5.25) ia forma simplificată

$$(2\tau^2 - 4)\delta^3 + 3(\tau^2 - 4)\delta^2 - 12\delta - 4 = 0. \quad (5.26)$$

Ecuația (5.25) are o singură rădăcină pozitivă δ cu condiția că

$$\sigma > 0, \quad \tau^2 > \frac{\sigma + 1}{\sigma}.$$

Dacă se cunoaște rădăcina ecuației (5.25), factorul de amortizare g_r se calculează din relația

$$g_r^2 = \left(1 - \frac{\omega_A^2}{\omega_r^2}\right)^2 \frac{\tau^2 \delta^2 - (\delta + 1)^2}{2\delta + 1}. \quad (5.27)$$

Amplitudinea maximă în modul rezonant este

$$\alpha_{j1}(\omega_r) - \xi_r = (1 + \sigma + \delta) (\alpha_A - \alpha_B),$$

valoare proporțională cu elementul $\Psi_j^{(r)}$ al vectorului modal.

Totuși, *determinarea vectorilor modali* se face folosind o *metodă de separare* directă, din răspunsul total măsurat experimental.

Folosind relațiile (3.65) și (3.11), vectorul receptanțelor complexe (3.70) devine

$$\{\bar{\alpha}\}_i = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_i^{(r)} \{\Psi^{(r)}\} e^{-i\psi_r}}{m_r \omega_r^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + g_r^2}} \quad (5.28)$$

Pornind de la observația că în vecinătatea rezonanțelor, în termenii predominanți ai sumei (5.28), $\cos \psi_r \rightarrow 0$, ceea ce revine la *aproximarea* răspunsului total prin suma răspunsurilor în cvadratură din fiecare mod vectorul receptanțelor *reale* se scrie sub forma

$$\{\alpha_i(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_i^{(r)} \{\Psi^{(r)}\}}{m_r} \frac{-\sin \psi_r}{\omega_r^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + g_r^2}} \quad (5.29)$$

sau

$$\{\alpha_i(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_i^{(r)} \{\Psi^{(r)}\}}{m_r} Q_r(\omega) \quad (5.30)$$

unde

$$Q_r(\omega) = \frac{-\sin \psi_r}{\omega_r^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + g_r^2}} = \frac{-g_r}{\omega_r^2 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + g_r^2\right]} = \frac{b_r(\omega)}{\omega_r^2} \quad (5.31)$$

Dacă se formează matricea pătrată

$$[\Psi_i \Psi] = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\Psi_i^{(1)}}{m_1} \{\Psi^{(1)}\} & \frac{\Psi_i^{(2)}}{m_2} \{\Psi^{(2)}\} & \dots & \frac{\Psi_i^{(N)}}{m_N} \{\Psi^{(N)}\} \end{array} \right], \quad (5.32)$$

în care vectorii modali pot fi normalizați astfel încît $[m] = [I]$, expresia (5.30) devine

$$\{\alpha_i(\omega)\} = [\Psi_i \Psi] \{Q(\omega)\}. \quad (5.33)$$

Se evaluează (5.33) la cele N pulsații de rezonanță $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ ale sistemului, determinate ca abscise ale punctelor de răspuns total maxim și se formează matricele pătrate

$$[\alpha] = [\{\alpha_i(\omega_1)\} \ \{\alpha_i(\omega_2)\} \ \dots \ \{\alpha_i(\omega_N)\}], \quad (5.34)$$

unde $\alpha_{jl}(\omega_r)$ sînt receptanțele maxime determinate pe diagrama amplitudine-frecvență și

$$[Q] = [\{Q(\omega_1)\} \{Q(\omega_2)\} \dots \{Q(\omega_N)\}]. \quad (5.35)$$

Rezultă relația

$$[\alpha] = [\Psi_i \Psi] [Q]. \quad (5.36)$$

care se scrie desfășurat

$$\begin{bmatrix} \alpha_1(\omega_1) & \alpha_1(\omega_2) & \dots & \alpha_1(\omega_N) \\ \alpha_2(\omega_1) & \alpha_2(\omega_2) & \dots & \alpha_2(\omega_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_N(\omega_1) & \alpha_N(\omega_2) & \dots & \alpha_N(\omega_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1^{(1)} \Psi_1^{(1)} & \Psi_1^{(2)} \Psi_1^{(2)} & \dots & \Psi_1^{(N)} \Psi_1^{(N)} \\ \Psi_2^{(1)} \Psi_2^{(1)} & \Psi_2^{(2)} \Psi_2^{(2)} & \dots & \Psi_2^{(N)} \Psi_2^{(N)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_N^{(1)} \Psi_N^{(1)} & \Psi_N^{(2)} \Psi_N^{(2)} & \dots & \Psi_N^{(N)} \Psi_N^{(N)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1(\omega_1) & Q_1(\omega_2) & \dots & Q_1(\omega_N) \\ Q_2(\omega_1) & Q_2(\omega_2) & \dots & Q_2(\omega_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_N(\omega_1) & Q_N(\omega_2) & \dots & Q_N(\omega_N) \end{bmatrix}$$

de unde se obține

$$[\Psi_i \Psi] = [\alpha] [Q]^{-1}. \quad (5.37)$$

Se calculează

$$\Psi_i^{(r)} = \sqrt{\Psi_i^{(r)} \Psi_i^{(r)}} \quad (r = 1, 2, \dots, N), \quad (5.38)$$

apoi

$$\Psi_j^{(r)} = \frac{\Psi_i^{(r)} \Psi_j^{(r)}}{\Psi_i^{(r)}} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \\ (j = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, N).$$

Metoda a fost aplicată de Thoren [116] la modelarea analitică a unui subsistem al treptei a doua a rachetei Saturn V.

e) La sisteme cu *pulsații proprii relativ apropiate* și cu *amortizare puternică*, metoda amplitudinii maxime duce la erori apreciabile. Amplitudinea maximă nu mai apare la pulsația proprie a modului rezonant. Forma curbei de răspuns este nesimetrică și modificată față de cea a sistemului cu un grad de libertate, astfel că determinarea amortizării este imprecisă.

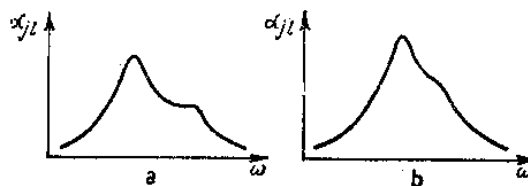


Fig. 5.21

În cazul prezenței unui mod puternic amortizat, cu pulsație proprie apropiată de cea a unui mod cu amortizare redusă (fig. 5.21), primul poate fi complet mascat. Se recomandă folosirea altor metode de identificare, prezentate în cele ce urmează.

5.3.3. Determinarea amortizării pe baza diagramei defazajelor

Pentru modurile de vibrație cu pulsații proprii relativ depărtate, rezonanța de fază corespunde la defazaaje de 90° sau 270° (fig. 5.22) între forță și deplasare.

La modurile de vibrație cu pulsații proprii relativ apropiate, acest criteriu nu mai poate fi aplicat. Rezultate bune se obțin dacă pulsațiile proprii se determină ca abscise ale punctelor de inflexiune ale diagramei defazajelor, apropiate de 90° , respectiv 270° , pe porțiunile cu pantă pozitivă. Amortizarea se calculează apoi pe baza valorii pantei tangentei la diagramă în punctele de inflexiune

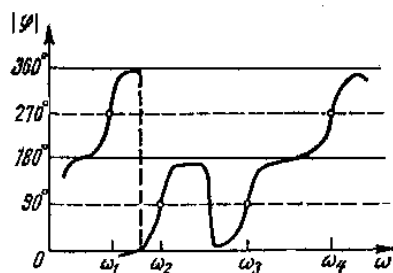


Fig. 5.22.

$$g_r = \frac{2}{\omega_r \left| \frac{d\varphi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_r}} \quad (5.40)$$

Evident că singură diagrama defazajului nu permite determinarea formei modurilor de vibrație și nici a constantelor elastice generalizate k_r sau a maselor modale m_r .

Se apreciază [85] că această metodă dă rezultate mai precise decât metoda amplitudinii maxime.

5.3.4. Metode de identificare pe baza diagramelor componentelor vectoriale ale răspunsului

Utilitatea folosirii diagramelor componentelor vectoriale ale răspunsului, la identificarea parametrilor unui sistem elastic, a fost semnalată pentru prima dată de către G. de Vries [124], metodele de analiză fiind apoi dezvoltate de Kennedy și Pancu [61], Stahle și Forlifer [113], Klosterman [63], Berman [10] și alții. În continuare exemplificarea se va face pe baza diagramelor receptanței.

5.3.4.1. Metoda răspunsului în cvadratură

Sub această denumire [86] s-a folosit cea mai simplă metodă de identificare, aplicată doar la sisteme cu pulsații proprii relativ depărtate. Rezonanțele se definesc prin pulsațiile la care componenta „în fază” a răspunsului este nulă (pe porțiuni de curbă a căror alură se aseamănă

cu diagrama componentei reale a sistemului cu un grad de libertate). Factorul de amortizare se calculează cu formula punctelor de semiputere (5.20), care corespund valorilor extreme ale componentei în fază din vecinătatea rezonanței (fig. 5.23 a).

Constanta elastică generalizată k_r se determină cu formula

$$k_r = \frac{1}{g_r |\alpha_{jI}(\omega_r)|} \quad (5.41)$$

Forma modurilor proprii de vibrație se determină pe baza valorilor la rezonanță ale componentei în cvadratură a răspunsului (fig. 5.23 b) măsurate în mai multe puncte semnificative ale structurii. Deci $\Psi_j^{(r)} = \alpha_{jI}(\omega_r)$.

5.3.4.2. Metoda componentei maxime în cvadratură

După cum rezultă din figura 5.8, la sisteme cu pulsații proprii relativ apropiate, componenta în fază a răspunsului nu se anulează la pulsațiile proprii ale modurilor individuale de vibrație.

La metoda „componentei maxime în cvadratură” [86] rezonanțele se definesc prin pulsațiile punctelor în care componenta în cvadratură a răspunsului are valori extreme. Se consideră, deci, că la pulsația ω_r , răspunsul în modul r este în cvadratură cu forța, iar componentele în cvadratură ale modurilor nerezonante sînt nule la pulsația ω_r . Aceasta presupune că diferența dintre răspunsul total la pulsația ω_r și componenta în cvadratură a modului r la această pulsație se datorește exclusiv componentelor în fază ale modurilor nerezonante (fig. 5.24).

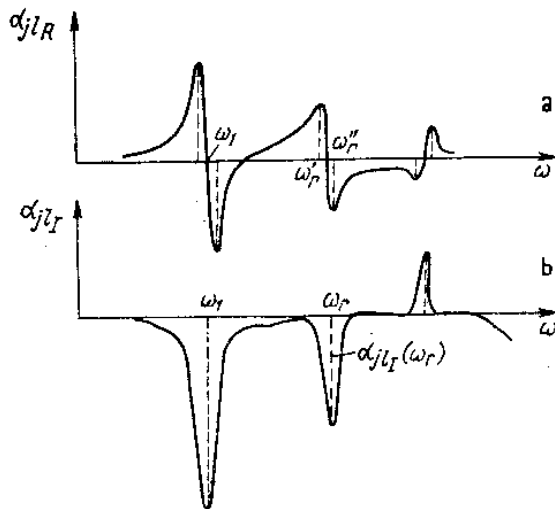


Fig. 5.23.

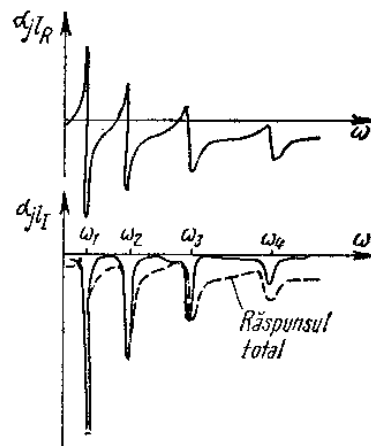


Fig. 5.24

Amortizarea se evaluează cu formula punctelor de semiputere (5.20) la care componenta în cvadratură are o amplitudine egală cu jumătate din cea maximă, calculată la rezonanță (fig. 2.13).

Forma modurilor de vibrație se determină pe baza valorilor maxime ale componentei în cvadratură măsurate în mai multe puncte semnificative ale structurii, la fiecare pulsație ω_r .

O variantă a acestei metode a fost utilizată de autor la identificarea structurală a unei mașini de frezat*.

5.3.4.3. Metoda răspunsului în fază

Dacă se dispune numai de diagrama componentei în fază a răspunsului, localizarea mai precisă a rezonanței se face la pulsațiile punctelor de inflexiune ale curbei, situate între cele două puncte de extremum (fig. 5.25). Calculul factorilor de amortizare se face cu relația

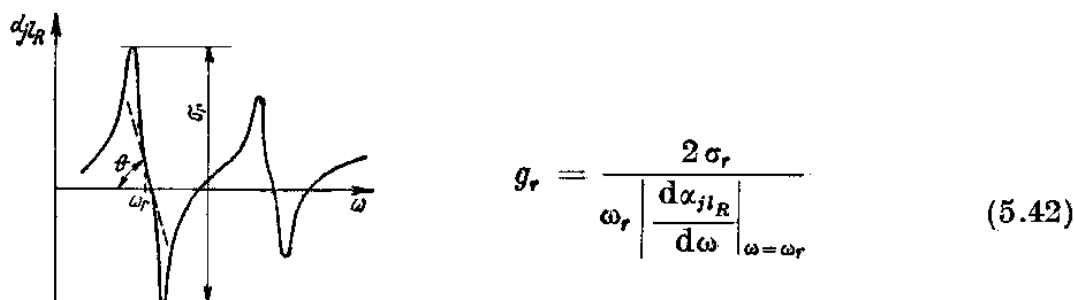


Fig. 5.25

în care σ_r este distanța între tangentele în punctele de extremum iar $\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{d\alpha_{jI_R}}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_r}$ este valoarea absolută a pantei tangentei la curbă în punctul de inflexiune.

Constantele elastice generalizate se calculează cu formula

$$k_r = \frac{1}{g_r \sigma_r} \quad (5.43)$$

iar masele generalizate din relația

$$m_r = \frac{k_r}{\omega_r^2}. \quad (5.44)$$

Forma modurilor de vibrație se determină pe baza valorilor σ_r (măsurate în mai multe puncte ale structurii), proporționale cu răspunsul maxim în modul rezonant, deci cu elementele vectorului modal $\{\Psi^{(n)}\}$.

La sisteme cu pulsații proprii relativ apropiate, metodele expuse mai sus dau erori, în special la determinarea formei modurilor proprii de vibrație. În cele ce urmează se prezintă principiul citorva metode de identificare care urmăresc separarea analitică a vectorilor modali din răspunsul total al sistemului.

5.3.4.4. Metoda separării fazelor

Sub această denumire, Stahle și Forlifer [113] au propus prima metodă de separare a vectorilor modali, din răspunsul în cvadratură măsurat experimental.

* Radeș, M., *Determinarea caracteristicilor dinamice ale materialelor și structurilor*, Lucrările Conferinței „Vibrații în construcția de mașini”, Timișoara, 1975, p. 347–352.

Pornind de la observația că diagrama componentei în cvadratură a răspunsului este cel mai puțin influențată de efectul interacțiunii modale, ei propun determinarea valorilor ω_r și g_r la fel ca la metoda componentei maxime în cvadratură (§ 5.3.4.2).

În continuare, pentru calculul formei modurilor proprii, se consideră relația (3.80).

$$\{\alpha_{l_I}(\omega)\} = [\chi] \{B(\omega)\} \quad (5.45)$$

care exprimă dependența de pulsație a componentei imagineare a deplasării în coordonatele q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) sub acțiunea unei forțe armonice aplicate coordonatei q_l .

Se evaluează expresia (5.45) la N_f pulsații excitatoare $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_{N_f}$ și se formează sistemul

$$[\alpha_{l_I}] = [\chi] [B], \quad (5.46)$$

unde

$$[\alpha_{l_I}] = [\{\alpha_{l_I}(\bar{\omega}_1)\} \quad \{\alpha_{l_I}(\bar{\omega}_2)\} \quad \dots \quad \{\alpha_{l_I}(\bar{\omega}_{N_f})\}], \quad (5.47)$$

$$[B] = [\{B(\bar{\omega}_1)\} \quad \{B(\bar{\omega}_2)\} \quad \dots \quad \{B(\bar{\omega}_{N_f})\}]. \quad (5.48)$$

Sistemul (5.46) se scrie desfășurat

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1l_I}(\bar{\omega}_1) & \alpha_{1l_I}(\bar{\omega}_2) & \dots & \alpha_{1l_I}(\bar{\omega}_{N_f}) \\ \alpha_{2l_I}(\bar{\omega}_1) & \alpha_{2l_I}(\bar{\omega}_2) & \dots & \alpha_{2l_I}(\bar{\omega}_{N_f}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{Nl_I}(\bar{\omega}_1) & \alpha_{Nl_I}(\bar{\omega}_2) & \dots & \alpha_{Nl_I}(\bar{\omega}_{N_f}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{1l}^{(1)} & \chi_{1l}^{(2)} & \dots & \chi_{1l}^{(N_f)} \\ \chi_{2l}^{(1)} & \chi_{2l}^{(2)} & \dots & \chi_{2l}^{(N_f)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_{Nl}^{(1)} & \chi_{Nl}^{(2)} & \dots & \chi_{Nl}^{(N_f)} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-g_1^2}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}_1^2}{\omega_1^2}\right) + g_1^2} & \frac{-g_1^2}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}_2^2}{\omega_1^2}\right) + g_1^2} & \dots & \frac{-g_1^2}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}_{N_f}^2}{\omega_1^2}\right) + g_1^2} \\ \frac{-g_2^2}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}_1^2}{\omega_2^2}\right) + g_2^2} & \frac{-g_2^2}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}_2^2}{\omega_2^2}\right) + g_2^2} & \dots & \frac{-g_2^2}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}_{N_f}^2}{\omega_2^2}\right) + g_2^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-g_N^2}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}_1^2}{\omega_N^2}\right) + g_N^2} & \frac{-g_N^2}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}_2^2}{\omega_N^2}\right) + g_N^2} & \dots & \frac{-g_N^2}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}_{N_f}^2}{\omega_N^2}\right) + g_N^2} \end{bmatrix}.$$

Dacă $N_f = N$ și $[B]$ este nesingulară, din relația (5.46) rezultă apoi

$$[\chi] = [\alpha_{l_I}] [B]^{-1}. \quad (5.49)$$

Elementele matricei $[B]^{-1}$ se calculează pe baza valorilor ω_r și g_r determinate experimental și a valorilor pulsațiilor excitatoare $\bar{\omega}_r$. Elemen-

tele matricei $[\alpha_{i_f}]$ se măsoară ca ordonate ale diagramelor componente în cvadratură a receptanțelor măsurate în N puncte distincte, la $N_f = N$ pulsații $\bar{\omega}_f$. Rezultă termeni de forma

$$\chi_{jl}^{(r)} = \frac{\Psi_i^{(r)} \Psi_j^{(r)}}{g_r k_r} \quad (5.50)$$

deci elementele vectorului modal $\{\Psi^{(r)}\}$ sînt proporționale cu elementele vectorului $\{\chi^{(r)}\}$. După normalizarea vectorilor modali, din relația (5.50) rezultă constantele elastice modale k_r , apoi $m_r = \frac{k_r}{\omega_r^2}$.

În forma inițială, Stahle și Forlifer [113] au ales pulsațiile excitatoare $\bar{\omega}_f$ egale cu pulsațiile proprii ω_r . Ei au arătat că în ecuația (5.46) nu este necesar să fie introduse decît modurile ale căror pulsații proprii sînt „suficient de apropiate” pentru a produce o interacțiune modală în răspunsul total în cvadratură. În cazuri practice curente, numărul acestora nu depășește patru.

Metoda nu se poate aplica atunci cînd două moduri diferite au pulsații proprii ω_r identice sau foarte apropiate și factori de amortizare g_r aproximativ egali. În majoritatea cazurilor însă, pentru a avea pulsații aproximativ egale, cele două moduri trebuie să fie de natură diferită (încovoiere și răsucire) sau să fie asociate cu vibrația unor părți distincte ale structurii. Separarea lor se face prin alegerea unei excitații corespunzătoare sau adoptarea unei metode de identificare cu excitație în mai multe puncte (v. cap. 6).

Dacă $N_f \neq N$, se recurge la metoda celor mai mici pătrate, după cum se arată în continuare, obținînd soluția aproximativă $[\chi] = [\alpha_{i_f}] [B]^{\#}$ unde $[B]^{\#} = [B]^T [[B] [B]^T]^{-1}$.

5.3.4.5. Metoda separării prin regresie

O primă îmbunătățire a metodei lui Stahle și Forlifer a fost făcută de Klosterman [63] și Davis [28]. Se presupun cunoscute valorile ω_r și g_r , calculate ca la metoda precedentă.

Folosind ordonatele diagramelor componentelor în fază și în cvadratură ale răspunsului în punctul j , calculate la $N_f > N$ pulsații excitatoare $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_f, \dots, \bar{\omega}_{N_f}$ ale forței armonice aplicate în l , se formează două sisteme de cîte N ecuații, fiecare ecuație avînd forma (3.77) sau (3.78)

$$\alpha_{jR}(\bar{\omega}_f) = \sum_{r=1}^N \chi_{jl}^{(r)} a_r(\bar{\omega}_f),$$

$$\alpha_{jI}(\bar{\omega}_f) = \sum_{r=1}^N \chi_{jl}^{(r)} b_r(\bar{\omega}_f). \quad (5.51)$$

Dacă se notează prin $\alpha_{jR}(\bar{\omega}_f)$ și $\alpha_{jI}(\bar{\omega}_f)$ valorile componentelor vectoriale ale receptanțelor măsurate experimental, acestea vor diferi de

expresiile analitice (5.51) prin niște erori $\varepsilon_R(\bar{\omega}_f)$ și $\varepsilon_I(\bar{\omega}_f)$, deci se pot scrie relațiile

$$\begin{aligned}\varepsilon_R(\bar{\omega}_f) &= \alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f) - \sum_{r=1}^N \chi_{ji}^{(r)} a_r(\bar{\omega}_f), \\ \varepsilon_I(\bar{\omega}_f) &= \alpha_{j_I}(\bar{\omega}_f) - \sum_{r=1}^N \chi_{ji}^{(r)} b_r(\bar{\omega}_f).\end{aligned}\tag{5.52}$$

Folosind metoda celor mai mici pătrate, se adună pătratele erorilor calculate la N_f pulsații excitatoare

$$\begin{aligned}E_R &= \sum_{f=1}^{N_f} \varepsilon_R^2(\bar{\omega}_f) = \sum_{f=1}^{N_f} \left[\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f) - \sum_{r=1}^N \chi_{ji}^{(r)} a_r(\bar{\omega}_f) \right]^2, \\ E_I &= \sum_{f=1}^{N_f} \varepsilon_I^2(\bar{\omega}_f) = \sum_{f=1}^{N_f} \left[\alpha_{j_I}(\bar{\omega}_f) - \sum_{r=1}^N \chi_{ji}^{(r)} b_r(\bar{\omega}_f) \right]^2\end{aligned}\tag{5.53}$$

și se determină coeficienții $\chi_{ji}^{(r)}$ astfel încît E_R și E_I să fie minime. Se derivează în raport cu $\chi_{ji}^{(s)}$ și se anulează rezultatele

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_R}{\partial \chi_{ji}^{(s)}} &= -2 \sum_{f=1}^{N_f} \alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f) a_s(\bar{\omega}_f) + 2 \sum_{f=1}^{N_f} a_s(\bar{\omega}_f) \sum_{r=1}^N \chi_{ji}^{(r)} a_r(\bar{\omega}_f) = 0, \\ \frac{\partial E_I}{\partial \chi_{ji}^{(s)}} &= -2 \sum_{f=1}^{N_f} \alpha_{j_I}(\bar{\omega}_f) b_s(\bar{\omega}_f) + 2 \sum_{f=1}^{N_f} b_s(\bar{\omega}_f) \sum_{r=1}^N \chi_{ji}^{(r)} b_r(\bar{\omega}_f) = 0.\end{aligned}\tag{5.54}$$

Relațiile (5.54) se mai scriu sub forma

$$\begin{aligned}\{a_s(\bar{\omega}_f)\}^T \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\} &= \{a_s(\bar{\omega}_f)\}^T [a] \{\chi_{ji}\}, \\ \{b_s(\bar{\omega}_f)\}^T \{\alpha_{j_I}(\bar{\omega}_f)\} &= \{b_s(\bar{\omega}_f)\}^T [b] \{\chi_{ji}\},\end{aligned}\tag{5.55}$$

unde s-a notat

$$\{a_s(\bar{\omega}_f)\} = \{a_s(\bar{\omega}_1) \ a_s(\bar{\omega}_2) \ \dots \ a_s(\bar{\omega}_{N_f})\}^T,\tag{5.56}$$

$$\{b_s(\bar{\omega}_f)\} = \{b_s(\bar{\omega}_1) \ b_s(\bar{\omega}_2) \ \dots \ b_s(\bar{\omega}_{N_f})\}^T,$$

$$\{\chi_{ji}\} = \{\chi_{ji}^{(1)} \ \chi_{ji}^{(2)} \ \dots \ \chi_{ji}^{(N)}\}^T,\tag{5.57}$$

$$[a] = [\{a_1(\bar{\omega}_f)\} \ \{a_2(\bar{\omega}_f)\} \ \dots \ \{a_N(\bar{\omega}_f)\}],\tag{5.58}$$

$$[b] = [\{b_1(\bar{\omega}_f)\} \ \{b_2(\bar{\omega}_f)\} \ \dots \ \{b_N(\bar{\omega}_f)\}],\tag{5.59}$$

$$\{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\} = \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_1) \ \alpha_{j_R}(\bar{\omega}_2) \ \dots \ \alpha_{j_R}(\bar{\omega}_{N_f})\}^T,\tag{5.60}$$

$$\{\alpha_{j_I}(\bar{\omega}_f)\} = \{\alpha_{j_I}(\bar{\omega}_1) \ \alpha_{j_I}(\bar{\omega}_2) \ \dots \ \alpha_{j_I}(\bar{\omega}_{N_f})\}^T.$$

Repetind derivarea pentru restul valorilor $x_{ji}^{(s)}$, se obțin două sisteme de câte N ecuații, cunoscute ca *ecuațiile normale* ale metodei celor mai mici pătrate

$$[a]^T \{\alpha_{jR}(\bar{\omega}_f)\} = [a]^T [a] \{x_{ji}\}, \quad (5.61)$$

$$[b]^T \{\alpha_{jI}(\bar{\omega}_f)\} = [b]^T [b] \{x_{ji}\}.$$

Deoarece $[a]$ și $[b]$ sînt matrice dreptunghiulare ($N_f \times N$), produsele $[a]^T [a]$ și $[b]^T [b]$ sînt matrice pătrate ($N \times N$). Înmulțind la stînga cu inversele acestor matrice, rezultă

$$\{x_{ji}\} = [a]^+ \{\alpha_{jR}(\bar{\omega}_f)\}, \quad (5.62)$$

$$\{x_{ji}\} = [b]^+ \{\alpha_{jI}(\bar{\omega}_f)\}, \quad (5.63)$$

unde

$$[a]^+ = [[a]^T [a]]^{-1} [a]^T, \quad [a]^+ [a] = [I], \quad (5.64)$$

$$[b]^+ = [[b]^T [b]]^{-1} [b]^T, \quad [b]^+ [b] = [I] \quad (5.65)$$

au forma unor matrice pseudoinverse, care se calculează cu metodele indicate la § 4.3.6.

Problema a fost tratată în cazul general de către Penrose [88] și este cunoscută sub numele de „soluția de normă minimă a unui sistem incompatibil de ecuații algebrice” sau soluția inversă generalizată a ecuațiilor (5.61).

Repetind măsurările și calculele pentru toate cele $j = 1, \dots, N$ puncte, se determină complet matricea $[\chi]$ definită de (3.81), ale cărei coloane sînt proporționale cu vectorii modali $\{\Psi^{(r)}\}$.

Un calcul analog se poate face pentru determinarea elementelor matricei $[\chi]$ definită de (3.84). Se va prezenta totuși o demonstrație diferită. Relațiile (5.52) se mai pot scrie sub forma

$$\varepsilon_R(\bar{\omega}_f) = \alpha_{jR}(\bar{\omega}_f) - \sum_{r=1}^N \chi_{ji}^{(r)} A_r(\bar{\omega}_f),$$

$$\varepsilon_I(\bar{\omega}_f) = \alpha_{jI}(\bar{\omega}_f) - \sum_{r=1}^N \chi_{ji}^{(r)} B_r(\bar{\omega}_f).$$

Evaluind aceste erori la N_f pulsații excitatoare, se formează două sisteme de câte N_f ecuații

$$\{\varepsilon_R\} = \{\alpha_{jR}(\bar{\omega}_f)\} - [\mathcal{A}] \{\chi_{ji}\}, \quad (5.66)$$

$$\{\varepsilon_I\} = \{\alpha_{jI}(\bar{\omega}_f)\} - [\mathcal{B}] \{\chi_{ji}\},$$

unde s-a notat

$$\{\varepsilon_R\} = \{\varepsilon_R(\bar{\omega}_1) \ \varepsilon_R(\bar{\omega}_2) \ \dots \ \varepsilon_R(\bar{\omega}_{N_f})\}^T,$$

$$\{\varepsilon_I\} = \{\varepsilon_I(\bar{\omega}_1) \ \varepsilon_I(\bar{\omega}_2) \ \dots \ \varepsilon_I(\bar{\omega}_{N_f})\}^T$$

$$[\mathcal{A}] = [A]^T, \quad [\mathcal{B}] = [B]^T, \quad (5.67)$$

$$[A] = [\{A(\bar{\omega}_1)\} \ \{A(\bar{\omega}_2)\} \ \dots \ \{A(\bar{\omega}_{N_f})\}], \quad (5.68)$$

matricea $[B]$ este definită de (5.48) iar vectorul $\{\chi_{ji}\}$ — de (4.56).

Se aplică metoda celor mai mici pătrate, calculând întâi suma pătratelor erorilor

$$E_R = \{\varepsilon_R\}^T \{\varepsilon_R\} = \left\{ \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\} - [\mathcal{A}] \{\chi_{ji}\} \right\}^T \left\{ \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\} - [\mathcal{A}] \{\chi_{ji}\} \right\} =$$

$$= \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\}^T \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\} - 2 \{\chi_{ji}\}^T [\mathcal{A}]^T \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\} + \{\chi_{ji}\}^T [\mathcal{A}]^T [\mathcal{A}] \{\chi_{ji}\},$$

anulînd apoi derivatele în raport cu $\chi_{ji}^{(r)}$

$$\frac{\partial E_R}{\partial \chi_{ji}^{(r)}} = -2 \{I\}_r^T [\mathcal{A}]^T \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\} + 2 \{I\}_r^T [\mathcal{A}]^T [\mathcal{A}] \{\chi_{ji}\} = 0,$$

unde $\{I\}_r$ este coloana r a matricei unitate $[I]$.

Rezultă

$$\frac{\partial E_R}{\partial \{\chi_{ji}\}} = -2 ([\mathcal{A}]^T \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\} - [\mathcal{A}]^T [\mathcal{A}] \{\chi_{ji}\}) = \{0\},$$

deci ecuațiile normale

$$[\mathcal{A}]^T [\mathcal{A}] \{\chi_{ji}\} = [\mathcal{A}]^T \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\}$$

și analog

$$[\mathcal{B}]^T [\mathcal{B}] \{\chi_{ji}\} = [\mathcal{B}]^T \{\alpha_{j_I}(\bar{\omega}_f)\}.$$

Deci

$$\{\chi_{ji}\} = [\mathcal{A}]^+ \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\}, \quad (5.69)$$

$$\{\chi_{ji}\} = [\mathcal{B}]^+ \{\alpha_{j_I}(\bar{\omega}_f)\}, \quad (5.70)$$

unde

$$[\mathcal{A}]^+ = [[\mathcal{A}]^T [\mathcal{A}]]^{-1} [\mathcal{A}]^T = [[A] [A]^T]^{-1} [A], \quad (5.71)$$

$$[\mathcal{B}]^+ = [[\mathcal{B}]^T [\mathcal{B}]]^{-1} [\mathcal{B}]^T = [[B] [B]^T]^{-1} [B]. \quad (5.72)$$

Repetînd calculele pentru toate punctele de măsură, se determină complet matricea $[\chi]$, apoi vectorii modali.

5.3.4.6. Metoda separării iterative

Klosterman [63] a propus o metodă de separare iterativă a modurilor proprii de vibrație ale unei structuri, bazată pe relațiile

$$\{\chi_{ji}\} = [a]^+ \{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\}, \quad (5.62)$$

$$\{\chi_{ji}\} = [\mathcal{B}]^+ \{\alpha_{j_I}(\bar{\omega}_f)\}. \quad (5.70)$$

Elementele matricelor $[a]$ și $[\mathcal{B}]$ se calculează pe baza unor prime estimări ale valorilor ω_r și g_r , din analiza grafică a diagramelor componente imaginare a receptanțelor (eventual pe baza ambelor diagrame $\alpha_{iR}(\omega)$ și $\alpha_{iI}(\omega)$, trasate într-un număr de puncte de măsură mai mare decît numărul gradelor de libertate efective din domeniul de frecvențe considerat, în care suprapunerea modurilor impune folosirea unei metode analitice de separare. Tot din aceste diagrame se măsoară elementele vectorilor $\{\alpha_{j_R}(\bar{\omega}_f)\}$ și $\{\alpha_{j_I}(\bar{\omega}_f)\}$.

Din ecuațiile (5.62) și (5.70) rezultă elementele $x_{ji}^{(r)}$ și $\chi_{ji}^{(r)}$, pe baza cărora se calculează o nouă valoare

$$g_r = \frac{x_{ji}^{(r)}}{\chi_{ji}^{(r)}}$$

cu care procesul iterativ se repetă, convergînd spre valorile reale $x_{ji}^{(r)}$ și g_r .

Repetînd procedeul pentru mai multe puncte de răspuns, se determină vectorii modali $\{\Psi^{(r)}\}$.

O metodă similară este utilizată în mod curent la identificarea dinamică a mașinilor unelte. Morse, Shapton și Wood [76] au arătat că precizia rezultatelor depinde în mare măsură de precizia evaluării inițiale a pulsațiilor proprii ω_r .

Flannelly, Berman și Giansante [36] au aplicat cu succes o metodă iterativă bazată numai pe diagrama componentei în cvadratură a răspunsului, la identificarea modelelor incomplete.

Evaluînd expresia (3.80) la $N_f > N$ pulsații excitatoare $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_{N_f}$, se formează sistemul

$$[\alpha_{I_f}] = [x] [b]^T = [\Psi] \left[\frac{\Psi_i^{(r)}}{k_r} b_{r_{max}} \right] [b_0] \quad (5.73)$$

în care $[\Psi]$ este o matrice dreptunghiulară ($N_m \times N$), condițiile de experimentare impuse de metodă făcînd ca numărul punctelor de măsurare a răspunsului (deci numărul de linii ale matricei $[\alpha_{I_f}]$) să fie mai mare ca numărul efectiv de grade de libertate ($N_m > N$), $[x]$ este dată de relația (3.81) iar matricea $[b_0]$ se obține din $[b]^T$ normalizînd fiecare linie prin împărțire la valoarea maximă $b_{r_{max}}$.

Elementele matricei $[\alpha_{I_f}]$ se măsoară la cele N_f pulsații excitatoare, iar matricele $[\Psi]$ și $[b_0]$ sînt necunoscute. Se folosește metoda matricei pseudoinverse într-o dublă iterație.

1) Se calculează o primă valoare a lui $[b_0]$, pe baza unor valori aproximative ω_r și g_r determinate experimental prin metodele expuse anterior.

2) Se calculează matricea $[\Psi]$ din relația

$$[\Psi] = [\alpha_{I_f}] [b_0]^\# \left[\frac{k_r}{\Psi_i^{(r)} b_{r_{max}}} \right] \quad (5.74)$$

unde

$$[b_0]^\# = [b_0]^T [[b_0][b_0]^T]^{-1}, \quad [b_0] [b_0]^\# = [I]. \quad (5.75)$$

3) Se determină o valoare îmbunătățită a matricei $[b_0]$ din relația

$$[b_0] = \left[\frac{k_r}{\Psi_i^{(r)} b_{r_{max}}} \right] [\Psi]^+ [\alpha_{I_f}], \quad (5.76)$$

unde

$$[\Psi]^+ = [[\Psi]^T [\Psi]]^{-1} [\Psi]^T, \quad [\Psi]^+ [\Psi] = [I], \quad (5.77)$$

apoi procedeul se repetă de la punctul 2, normalizînd fiecare soluție pînă la obținerea convergenței. Calculele se simplifică dacă se alege

$$\left[\frac{k_r}{\Psi_i^{(r)} b_{r_{max}}} \right] = [I].$$

Din (5.76) rezultă apoi $[b]^T$, deci elementele $\frac{1}{k_r} b_r(\bar{\omega}_f) = \mathcal{I}m \bar{\alpha}_r(\bar{\omega}_f) = \alpha_{r_I}(\bar{\omega}_f)$. Dintr-o relație analogă, pe baza matricei $[\alpha_{I_R}]$ se calculează $\mathcal{R}e \bar{\alpha}_r(\bar{\omega}_f) = \alpha_{r_R}(\bar{\omega}_f)$, apoi

$$\mathcal{R}e \bar{\beta}_r(\bar{\omega}_f) = \beta_{r_R}(\bar{\omega}_f) = \frac{\alpha_{r_R}(\bar{\omega}_f)}{\alpha_{r_R}^2(\bar{\omega}_f) + \alpha_{r_I}^2(\bar{\omega}_f)} = k_r \left(1 - \frac{\bar{\omega}_f^2}{\omega_r^2} \right).$$

Reprezentînd grafic funcția $\beta_{r_R}(\bar{\omega}_f)$ pentru mai multe valori $\bar{\omega}_f$, se determină ω_r ca abscisa punctului în care $\beta_{r_R} = 0$. Din relația de mai sus rezultă k_r , apoi

$$g_r = \left(\frac{\bar{\omega}_f^2}{\omega_r^2} - 1 \right) \frac{\alpha_{r_I}}{\alpha_{r_R}}, \quad m_r = \frac{k_r}{\omega_r^2}.$$

5.3.4.7. Metoda eliminării matricei modale

Natke [77] a generalizat metoda separării fazelor pentru cazul cînd nu se cunosc pulsațiile proprii ω_r și factorii de amortizare g_r .

Se pornește de la relațiile (3.79) și (3.80), definite pentru $N_m > N$ puncte de măsură

$$\{\alpha_{I_R}(\omega)\} = [\chi] \{A(\omega)\}, \quad \{\alpha_{I_I}(\omega)\} = [\chi] \{B(\omega)\}.$$

Se evaluează aceste expresii la $N_f = N$ pulsații excitatoare $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{N_f}$ și se formează sistemele

$$[\alpha_{I_R}] = [\chi][A], \quad (5.78)$$

$$[\alpha_{I_I}] = [\chi][B], \quad (5.79)$$

unde $[A]$ și $[B]$ sînt matrice pătrate ($N \times N$) iar $[\alpha_{I_R}]$, $[\alpha_{I_I}]$ și $[\chi]$ sînt matrice dreptunghiulare ($N_m \times N$). În ecuațiile (5.78) și (5.79) s-au folosit notațiile (3.84), (5.47), (5.48), (5.68) și

$$[\alpha_{I_R}] = [\{\alpha_{I_R}(\bar{\omega}_1)\} \quad \{\alpha_{I_R}(\bar{\omega}_2)\} \quad \dots \quad \{\alpha_{I_R}(\bar{\omega}_{N_f})\}]. \quad (5.80)$$

Se elimină matricea $[\chi]$ între (5.78) și (5.79). Pentru aceasta, se înmulțește în ecuația (5.79) la dreapta cu inversa matricei $[B]$

$$[\alpha_{I_I}][B]^{-1} = [\chi][B][B]^{-1} = [\chi] \quad (5.81)$$

apoi din ecuația (5.78) rezultă

$$[\alpha_{I_R}] = [\alpha_{I_I}][B]^{-1}[A]. \quad (5.82)$$

Se înmulțește la stînga cu $[\alpha_{I_r}]^T$

$$[\alpha_{I_r}]^T [\alpha_{I_R}] = [\alpha_{I_r}]^T [\alpha_{I_r}] [B]^{-1} [A]$$

apoi, deoarece matricea $[\alpha_{I_r}]$ nu este pătrată, se înmulțește la stînga cu $[[\alpha_{I_r}]^T [\alpha_{I_r}]]^{-1}$ și se obține

$$[[\alpha_{I_r}]^T [\alpha_{I_r}]]^{-1} [\alpha_{I_r}]^T [\alpha_{I_R}] = [B]^{-1} [A].$$

După înmulțirea la stînga cu $[B]$ rezultă

$$[A] = [B] [e] \quad (5.83)$$

unde s-a introdus matricea

$$[e] = [\alpha_{I_r}]^+ [\alpha_{I_R}] \quad (5.84)$$

în care

$$[\alpha_{I_r}]^+ = [[\alpha_{I_r}]^T [\alpha_{I_r}]]^{-1} [\alpha_{I_r}]^T.$$

Între elementele matricelor $[A]$ și $[B]$ se stabilește relația

$$A_r^2(\bar{\omega}_f) = - B_r(\bar{\omega}_f) [1 + B_r(\bar{\omega}_f)] \quad (5.85)$$

care se deduce ușor din (3.72) și (3.73). Din (5.83) se obține

$$A_r(\bar{\omega}_f) = \sum_{e=1}^N B_r(\bar{\omega}_e) e_{ef} \quad (5.86)$$

unde e_{ef} sînt elementele matricii $[e] = [e_{ef}]$ măsurate experimental. Rezultă N sisteme de N ecuații în $B_r(\bar{\omega}_f)$, deci N^2 ecuații

$$B_r(\bar{\omega}_f) [1 + B_r(\bar{\omega}_f)] + \left(\sum_{e=1}^N B_r(\bar{\omega}_e) e_{ef} \right)^2 = 0, \quad (r, f = 1, \dots, N) \quad (5.87)$$

din care rezultă cele N^2 elemente ale matricii $[B]$.

Elementele $B_r(\bar{\omega}_f)$ depind doar de pulsațiile proprii ω_r și de factorii de amortizare g_r . Dacă se notează

$$\tau_r(\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{g_r} \quad (5.88)$$

atunci se poate scrie

$$B_r(\omega) = - \frac{1}{\tau_r^2(\omega) + 1}, \quad (5.89)$$

deci se poate calcula

$$\tau_r(\omega) = \pm \sqrt{-\left[1 + \frac{1}{B_r(\omega)}\right]}. \quad (5.90)$$

Se evaluează expresia (5.88) pentru două pulsații excitatoare diferite, $\bar{\omega}_e$ și $\bar{\omega}_f$. Se obține

$$g_r = \frac{\bar{\omega}_f^2 - \bar{\omega}_e^2}{\bar{\omega}_f^2 \tau_r(\bar{\omega}_e) - \bar{\omega}_e^2 \tau_r(\bar{\omega}_f)}, \quad (5.91)$$

$$\omega_r^2 = \frac{\bar{\omega}_f^2 \tau_r(\bar{\omega}_e) - \bar{\omega}_e^2 \tau_r(\bar{\omega}_f)}{\tau_r(\bar{\omega}_e) - \tau_r(\bar{\omega}_f)}. \quad (5.92)$$

Cu aceste valori se construiește matricea $[B]$. Dacă aceasta este nesingulară, matricea modală se obține din ecuația (5.79)

$$[\chi] = [\alpha_{l_r}] [B]^{-1}. \quad (5.93)$$

Vectorii proprii sînt apoi normalizați astfel încît elementul de valoare absolută maximă să devină egal cu unitatea. Rezultă

$$\{\Psi^{(r)}\} = \frac{\{\chi^{(r)}\}}{\chi_{j, \max}^{(r)}}. \quad (5.94)$$

Se calculează apoi constantele elastice modale

$$k_r = \frac{\Psi_i^{(r)}}{g_r \chi_{j, \max}^{(r)}} \quad (5.95)$$

și masele modale $m_r = \frac{k_r}{\omega_r^2}$.

5.3.5. Metode de identificare pe baza diagramei polare a răspunsului

O formă convenabilă de reprezentare a răspunsului unei structuri o constituie diagramele polare, trasate în planul complex ca locuri geometrice ale afixelor unei funcții complexe de răspuns în frecvență. Analiza grafică a acestor *diagrame Nyquist*, sub forma propusă încă din 1947 de Kennedy și Pancu [61], s-a dovedit a fi cea mai precisă metodă de determinare a parametrilor dinamici și a formei modurilor proprii de vibrație ale unei structuri complexe, în special atunci cînd există pulsații proprii apropiate [85]. Ulterior s-au adus îmbunătățiri acestei metode, fie prin folosirea excitației cu forțe în cvadratură [90], fie prin analiza numerică a curbelor determinate experimental [42, 43].

În continuare se vor prezenta doar câteva metode grafice mai frecvent utilizate.

La sisteme cu un grad de libertate și amortizare histeretică, diagrama polară a receptanței complexe este un cerc (fig. 2.14) care trece prin originea axelor de coordonate și are centrul pe semiaxa imaginară negativă. Analiza grafică a acestor diagrame a fost tratată în paragraful 2.2.1.2.

La sisteme cu mai multe grade de libertate, diagramele polare sînt formate din mai multe bucle, în general cîte una pentru fiecare mod de vibrație. În figura 5.26 se prezintă diagrama obținută pe o mașină de frezat, folosind excitație verticală între sculă și piesă.

Analiza grafică a acestor diagrame se face aproximînd fiecare buclă cu un cerc și folosind relațiile de calcul stabilite pentru sisteme cu un grad de libertate. În general, în afara ipotezei asupra amortizării proporționale, se consideră că în vecinătatea unei rezonanțe oarecare, contribuția modurilor nerezonante este fie neglijabilă, fie constantă (independentă de pulsația excitatoare), ceea ce revine la acceptarea unei aproximații de forma (5.23).

Dacă pe fiecare buclă a diagramei polare se marchează puncte corespunzătoare unor creșteri egale $\Delta\omega$ ale pulsației excitatoare, localizarea pulsației de rezonanță se face acolo unde lungimile corespunzătoare ale arcelor de curbă Δs sînt maxime, deci unde raza vectoroare mătură un unghi maxim pentru o creștere dată $\Delta\omega$ a pulsației (fig. 5.27). Prin punctele din vecinătatea fiecărei rezonanțe se trasează apoi „cel mai potrivit” cerc (linie întreruptă).

Fie M punctul ce definește pulsația de rezonanță ω_r pe bucla corespunzătoare modului r . Diametrul la rezonanță al cercului respectiv este

$$\overline{O'M} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial q_i}{\partial p_r} \frac{\partial q_j}{\partial p_r} = \frac{1}{h_r} \Psi_i^{(r)} \Psi_j^{(r)}. \quad (5.96)$$

Punctul O' este „originea deplasată” a vectorului $O'P$ care reprezintă deplasarea în modul r , la pulsația ω . Vectorul OO' reprezintă contribuția constantă a celorlalte moduri de vibrație la răspunsul total OP în vecinătatea rezonanței în modul r . Vectorul $O'M$ reprezintă amplitudinea maximă de vibrație în modul r . Calculînd rapoartele diametrelor $O'M$, la cercuri trasate pe diagrame polare determinate pentru diferite puncte j ale structurii, cînd excitația este aplicată în punctul l , se obține cea mai corectă formă a modului propriu de vibrație studiat $\{\Psi^{(r)}\}$.

Localizarea rezonanței în zona unde raportul $\frac{\Delta s}{\Delta\omega}$ are valoare maximă, are avantajul de a fi independentă de sistemul axelor de

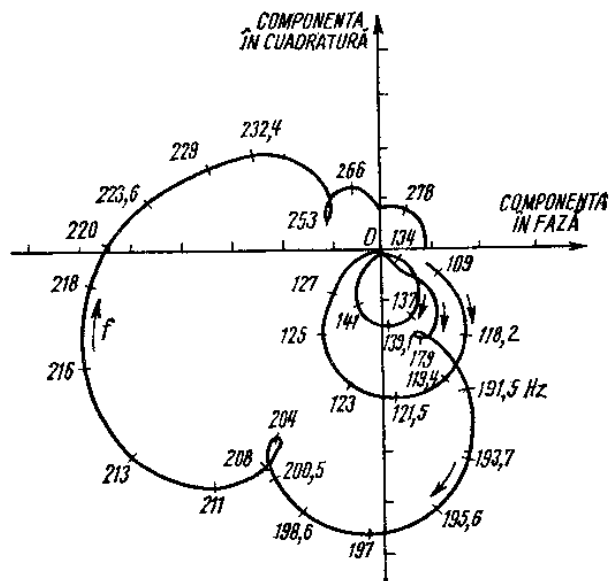


Fig. 5.26

coordonate, fiind valabilă și în cazul amortizării neproportionale (v. § 5.4).

Deoarece în cazul amortizării proporționale și a constantei contribuției modurilor nerezonante la răspunsul total, *diametrul la rezonanță* $O'M$ rămâne paralel cu axa imaginară, localizarea pulsației ω_r se poate

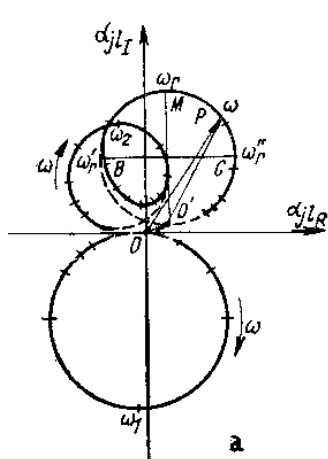


Fig. 5.27

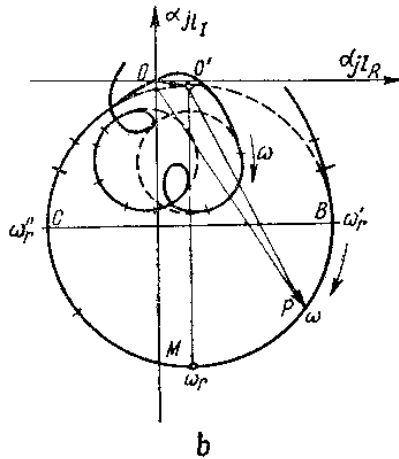


Fig. 5.28

face folosind *criteriul valorii extreme a componentei imaginare* a receptanței. Acesta este însă implicit legat de poziționarea corectă a axelor de coordonate și trebuie utilizat cu precauție în cazul antirezonanțelor.

Pentru determinarea amortizării se trasează diametrul BC , perpendicular pe $O'M$, care intersectează cercul în punctele de semiputere B și C , la pulsațiile ω_r' și ω_r'' . Factorul de amortizare se calculează cu relația (5.20).

La diagrame polare de forma celei din figura 5.28, pe care nu se pot citi valorile pulsațiilor ω_r' și ω_r'' , factorul de amortizare se calculează cu relația

$$g_r = \frac{\omega_Q^2 - \omega_P^2}{\omega_r^2} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \quad (5.97)$$

unde ω_Q și ω_P sînt pulsațiile punctelor Q și P din vecinătatea rezonanței iar θ_2 și θ_1 sînt unghiurile pe care razele vectoriale corespunzătoare le fac cu semiaxa reală pozitivă.

Dacă unghiurile $\widehat{PO'M} = \widehat{MO'Q} = \theta$, atunci se stabilește formula

$$g_r = \frac{\omega_Q^2 - \omega_P^2}{2\omega_r^2} \cotg \theta. \quad (5.98)$$

Alte relații pentru calculul amortizării au fost prezentate la paragraful 2.2.1.2. Faptul că măsurările se fac aproximativ la amplitudine constantă este util la identificarea sistemelor neliniare.

Masele modale se calculează cu relații de forma

$$m_r = \frac{1}{\omega_r^2 g_r \overline{O'M}} \quad (5.99)$$

după o „normalizare” a diametrelor $\overline{O'M}$.

Analog se face analiza diagramelor polare ale mobilității sau iner-tanței.

În figura 5.29 se prezintă o parte a diagramei polare a deplasării verticale a sculei unei mașini de frezat, în cazul excitației armonice cu o

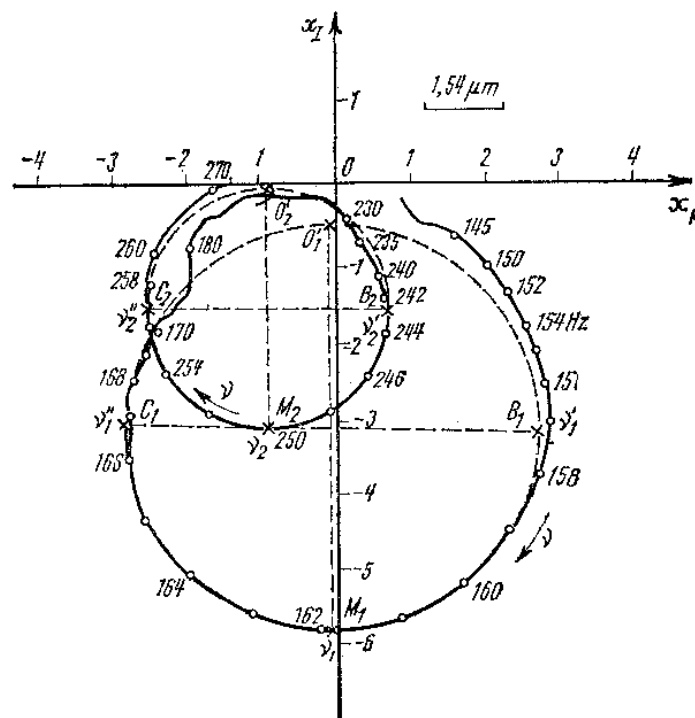


Fig. 5.29

forță verticală de amplitudine $\hat{f}=36 \text{ N}$. O diviziune pe axele de coordonate reprezintă $1,54 \mu\text{m}$. Cu ajutorul criteriului Kennedy-Pancu se determină prima frecvență de rezonanță $\nu_1 = 161,9 \text{ Hz}$. Se trasează cercul care aproximează cel mai bine punctele diagramei din vecinătatea rezonanței. Diametrul O_1M_1 corespunde unei deplasări de $8,25 \mu\text{m}$. Diametrul B_1C_1 , perpendicular pe O_1M_1 , determină frecvențele $\nu'_1 = 157,2 \text{ Hz}$ și $\nu''_1 = 166,8 \text{ Hz}$. Rezultă

$$g_1 = \frac{\nu''_1 - \nu'_1}{\nu_1} = \frac{166,8 - 157,2}{161,9} = 0,0593;$$

$$m_1 = \frac{\hat{f}}{\omega_1^2 g_1 \overline{O_1M_1}} = \frac{36}{4\pi^2 \cdot 161,9^2 \cdot 0,0593 \cdot 8,25 \cdot 10^{-6}} = 71,1 \text{ kg};$$

$$k_1 = m_1 \omega_1^2 = 71,1 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 161,9^2 = 73,6 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Se procedează analog cu a doua buclă a diagramei. Frecvența de rezonanță este $\nu_2 = 250$ Hz. Diametrul O_2M_2 corespunde unei deplasări de 4,79 μm . Diametrul B_2C_2 determină frecvențele $\nu_2' = 242,6$ Hz și $\nu_2'' = 256,7$ Hz. Rezultă

$$g_2 = \frac{\nu_2'' - \nu_2'}{\nu_2} = \frac{256,7 - 242,6}{250} = 0,0564;$$

$$m_2 = \frac{\hat{f}}{\omega_2^2 g_2 O_2M_2} = \frac{36}{4\pi^2 \cdot 250^2 \cdot 0,0564 \cdot 4,79 \cdot 10^6} = 54,1 \text{ kg.};$$

$$k_2 = m_2 \omega_2^2 = 54,1 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 250^2 = 133,3 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

5.3.6. Metoda „legăturilor modale”

Sub această denumire, Raney și Howlett [98] au propus o metodă de *identificare directă*, aplicabilă la structuri slab amortizate, avînd moduri de vibrație suficient de decuplate și separate în frecvență pentru a putea fi reprezentate prin răspunsul unui sistem cu un grad de libertate. Ea se bazează pe un sistem de ecuații diferențiale decuplate, care definesc o relație de transfer „forță-deplasare” între două puncte specifice ale structurii, modelul matematic fiind deci valabil numai pentru cele două puncte de excitație-răspuns considerate.

În paragraful 3.2.1. s-a arătat cum, pornind de la sistemul ecuațiilor de mișcare cuplate ale unei structuri cu amortizare viscoasă

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{f\},$$

aplicînd transformarea de coordonate

$$\{q\} = [\Psi] \{p\} \quad (5.100)$$

se deduce sistemul de ecuații decuplate

$$[m] \{\ddot{p}\} + [c] \{\dot{p}\} + [k] \{p\} = [\Psi]^T \{f\}.$$

Dacă se aplică o singură forță exterioară $f_i(t)$ în punctul l , ecuația de mișcare pentru coordonata principală r este

$$m_r \ddot{p}_r + c_r \dot{p}_r + k_r p_r = \Psi_l^{(r)} f_i(t). \quad (5.101)$$

Din ecuația (5.100) rezultă că răspunsul în modul r este

$$\{q^{(r)}\} = \{\Psi^{(r)}\} p_r,$$

deci, deplasarea în punctul j , în modul r , este

$$q_j^{(r)} = \Psi_j^{(r)} p_r.$$

Rezultă

$$p_r = \frac{q_j^{(r)}}{\Psi_j^{(r)}}. \quad (5.102)$$

Înlocuind (5.102) în (5.101) și împărțind la $\Psi_j^{(r)}$, se obține

$$M_{jj}^{(r)} \ddot{q}_j^{(r)} + C_{jj}^{(r)} \dot{q}_j^{(r)} + K_{jj}^{(r)} q_j^{(r)} = f_i(t) \quad (5.103)$$

unde s-a notat

$$M_{jj}^{(r)} = \frac{m_r}{\Psi_j^{(r)} \Psi_j^{(r)}}, \quad C_{jj}^{(r)} = \frac{c_r}{\Psi_j^{(r)} \Psi_j^{(r)}}, \quad K_{jj}^{(r)} = \frac{k_r}{\Psi_j^{(r)} \Psi_j^{(r)}}. \quad (5.104)$$

Ecuatia (5.103) reprezintă răspunsul sistemului în punctul j , în modul r , datorită unei forțe aplicate în punctul l . Rezolvind cele N ecuații (5.103), corespunzătoare celor N moduri de vibrație, prin suprapunerea soluțiilor, se obține răspunsul total în punctul j , produs de forța aplicată în l

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^N q_j^{(r)}(t). \quad (5.105)$$

Ecuatiile (5.103) definesc niște „legături modale”, deoarece între punctele l și j (fig. 5.30) se pot stabili N legături, corespunzător celor N moduri de vibrație, fiecare legătură avînd o caracteristică de răspuns $H_{ij}^{(r)}(\omega)$, care se deduce din ecuația corespunzătoare (5.103). Legături similare se pot stabili între punctul l și alte puncte de interes ale structurii.

Ecuatiile legăturilor modale au următoarele caracteristici:

a — Există cîte o ecuație pentru fiecare pereche de puncte și fiecare mod.

b — Toate ecuațiile sînt decuplate.

c — Toate ecuațiile conțin aceeași forță perturbatoare, care poate avea orice dependență de timp.

d — Parametrii legăturilor modale $M_{jj}^{(r)}$, $C_{jj}^{(r)}$ și $K_{jj}^{(r)}$ sînt pozitivi cînd $\Psi_l^{(r)}$ și $\Psi_j^{(r)}$ sînt în fază, și negativi cînd acestea sînt în antifază.

e — Dacă se cunosc parametrii legăturilor modale, răspunsul poate fi calculat pentru valori arbitrare ale forței $f_i(t)$.

Evaluarea parametrilor legăturilor modale (5.104) se poate face în regim de excitație armonică. Se solicită structura într-un singur punct cu o forță

$$f_i(t) = \hat{f}_i \sin \omega t \quad (5.106)$$

și se măsoară răspunsul în punctele de interes. Variînd pulsația ω astfel încît domeniul de măsură să cuprindă toate rezonanțele importante ale structurii, se trasează curbe de răspuns în frecvență de tipul celor din figura 5.31.

Dacă pulsația ω este apropiată de o pulsație de rezonanță ω_r , atunci un mod de vibrație este dominant și răspunsul total are forma

$$q_j^{(r)} = \hat{q}_j \sin(\omega t - \varphi_{1j}). \quad (5.107)$$

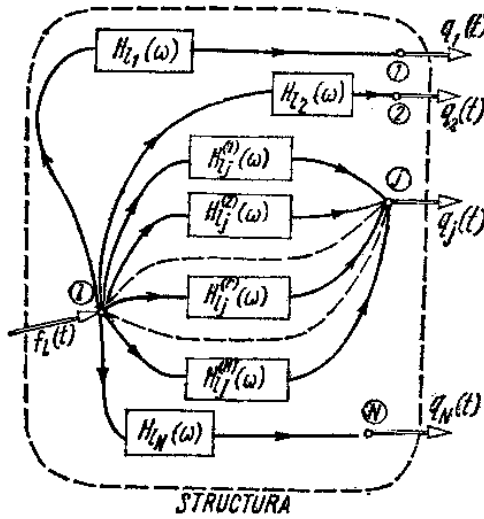


Fig. 5.30

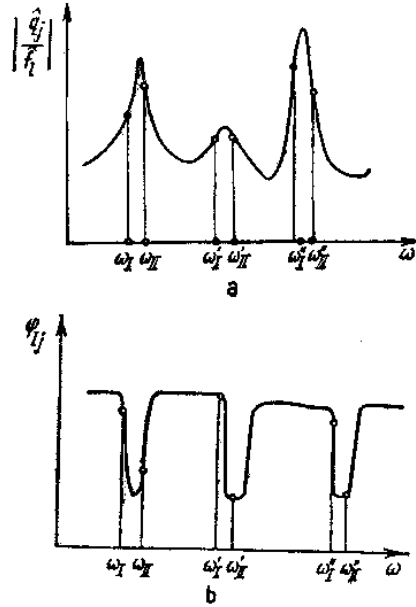


Fig. 5.31

Înlocuind (5.106) și (5.107) în (5.103), rezultă

$$K_{1j}^{(r)} - \omega^2 M_{1j}^{(r)} = \frac{\hat{f}_1}{\hat{q}_j} \cos \varphi_{1j}, \quad (5.108)$$

$$C_{1j}^{(r)} = \frac{\hat{f}_1}{\omega \hat{q}_j} \sin \varphi_{1j}. \quad (5.109)$$

Măsurînd valorile $\left| \frac{\hat{q}_j}{\hat{f}_1} \right|$ și φ_{1j} la două pulsații în vecinătatea fiecărei rezonanțe, se pot calcula cei trei parametri (5.104) din relațiile (5.108) și (5.109).

Dacă se dispune doar de o curbă amplitudine-pulsație (fig. 5.31 a) atunci se folosește relația

$$(K_{1j}^{(r)} - \omega^2 M_{1j}^{(r)})^2 + (\omega C_{1j}^{(r)})^2 = \left(\frac{\hat{f}_1}{\hat{q}_j} \right)^2 \quad (5.110)$$

din care se calculează parametrii legăturilor modale, măsurînd receptanța $\left| \frac{\hat{q}_j}{\hat{f}_1} \right|$ la trei pulsații ω în vecinătatea fiecărei rezonanțe.

Metoda a fost folosită cu succes la analiza dinamică a modelelor la scară ale complexului spațial Apollo — Saturn 5 [98], fiind utilizată ulterior de Hillyer [54] și Ibáñez [55].

Dacă prin identificare se urmărește construirea unui model fizic al structurii, se procedează în felul următor :

Se determină parametrii modali pe baza parametrilor legăturilor modale, folosind relațiile

$$\begin{aligned} m_r &= M_{ij}^{(r)} \Psi_{ii}^{(r)} \Psi_{ij}^{(r)}, \\ k_r &= K_{ij}^{(r)} \Psi_{ii}^{(r)} \Psi_{ij}^{(r)}, \\ c_r &= C_{ij}^{(r)} \Psi_{ii}^{(r)} \Psi_{ij}^{(r)}, \end{aligned} \quad (5.111)$$

unde $\Psi_{ij}^{(r)}$ sînt deplasări normalizate, calculate la pulsațiile de rezonanță, cu o formulă de forma

$$\Psi_{ij}^{(r)} = \frac{\text{Receptanța în punctul } j, \text{ la } \omega = \omega_r}{\text{Receptanța în punctul } l, \text{ la } \omega = \omega_r}.$$

Deci

$$\Psi_{ii}^{(r)} = 1, \quad \Psi_{ij}^{(r)} = \frac{(\hat{q}_j / \hat{f}_i)_{\omega = \omega_r}}{(\hat{q}_i / \hat{f}_i)_{\omega = \omega_r}}, \quad (5.112)$$

urmărind ca raportul $\frac{\hat{q}_j}{\hat{f}_i}$ să fie negativ dacă mișcarea în punctul j este în antifază cu forța aplicată în punctul l .

Se construiește matricea modală

$$[\Psi_i] = [\{\Psi_i^{(1)}\} \quad \{\Psi_i^{(2)}\} \quad \dots \quad \{\Psi_i^{(N)}\}] \quad (5.113)$$

unde

$$\{\Psi_i^{(r)}\} = \{\Psi_{i1}^{(r)} \quad \Psi_{i2}^{(r)} \quad \dots \quad \Psi_{ij}^{(r)} \quad \dots \quad \Psi_{in}^{(r)}\}^T$$

și se calculează matricele parametrilor modelului fizic

$$\begin{aligned} [M] &= [\Psi_i]^{-T} [m] [\Psi_i]^{-1}, \\ [K] &= [\Psi_i]^{-T} [k] [\Psi_i]^{-1}, \\ [C] &= [\Psi_i]^{-T} [c] [\Psi_i]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.114)$$

5.4. Identificarea sistemelor cu amortizare neproportională

5.4.1. Sisteme cu amortizare histeretică

5.4.1.1. Metoda diagramelor polare

În cazul excitației într-un punct, răspunsul armonic al unui sistem liniar, cu amortizare histeretică neproportională (3.201), se poate scrie sub forma

$$\bar{\alpha}_{ji} = \sum_{r=1}^N (x_j^{(r)} + iy_j^{(r)}) \bar{\alpha}_r \quad (5.115)$$

unde

$$\bar{\alpha}_r = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + ig_r} \quad (5.116)$$

este receptanța modală complexă.

Considerînd un singur termen din suma (5.115), interesează forma diagramei polare corespunzătoare.

Răspunsul în punctul j , în modul r , are expresia

$$\bar{\alpha}_{jl}^{(r)} = (x_j^{(r)} + iy_j^{(r)}) \bar{\alpha}_r. \quad (5.117)$$

Dacă se reprezintă în planul complex doar expresia (5.116), se obține diagrama polară din figura 5.32a.

În figura 5.32 b se arată efectul înmulțirii expresiei (5.116) cu cantitatea complexă $x_j^{(r)} + iy_j^{(r)}$. Diagrama polară a cantității (5.117) este tot un cerc, însă diametrul \overline{OM} are valoarea $\frac{1}{g_r} \sqrt{x_j^{(r)2} + y_j^{(r)2}}$ și face un unghi $\theta_j^{(r)} = \text{arctg} \frac{y_j^{(r)}}{x_j^{(r)}}$ cu semiaxa imaginară negativă. Înmulțirea

receptanței $\bar{\alpha}_r$, cu o cantitate complexă constantă produce deci o rotire a diagramei polare corespunzătoare și o creștere a diametrului, distribuția parametrului pulsație în lungul diagramei rămînînd aceeași.

Acest fapt a fost semnalat prima dată de Woodcock [137] și studiat în detaliu de Klosterman [63]. Efectul este același cu cel întîlnit la excitația cu forțe în cvadratură (§ 2.3).

Faptul că distribuția pulsațiilor nu se modifică, permite aplicarea metodei Kennedy—Pancu de localizare a rezonanței și în cazul sistemelor cu amortizare neproportională, cu pulsații proprii relativ depărtate.

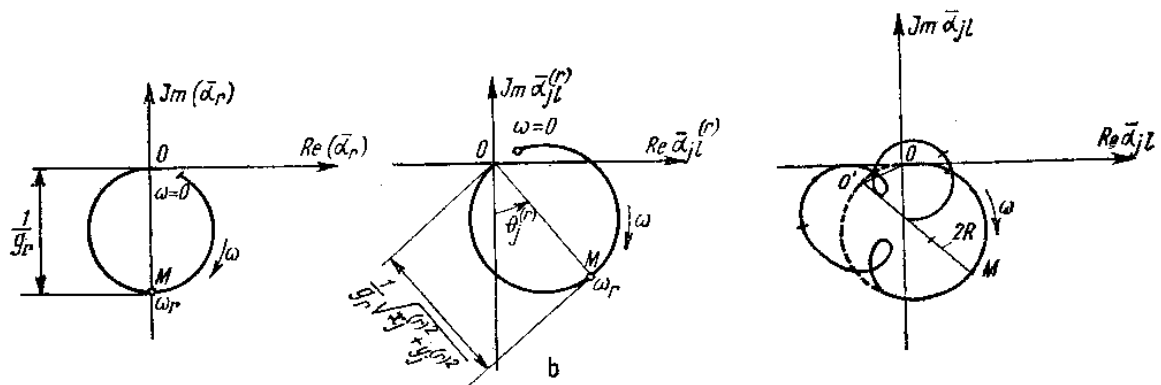


Fig. 5.32

Fig. 5.33

Diagrama polară a răspunsului în frecvență a unui sistem cu mai multe grade de libertate are forma din figura 5.33, rezultînd prin însumarea mai multor diagrame ca cea din figura 5.32. Fiecare buclă a diagramei poate fi aproximată cu un cerc, reprezentînd mișcarea într-un anumit mod de vibrație.

Existența simultană a mai multor moduri de vibrație determină deplasarea originii fiecărui cerc. Ca și la sistemele cu amortizare propor-

țională, vectorul originii deplasate este o măsură pentru contribuția modurilor nerezonante la răspunsul total în domeniul de pulsații corespunzător rezonanței într-un anumit mod.

După localizarea rezonanței cu ajutorul criteriului Kennedy-Pancu (v. § 2.2.1.2.) și trasarea „celui mai potrivit” cerc prin punctele din vecinătatea rezonanței, se poate trasa diametrul la rezonanță $O'M = 2R$ care este o măsură pentru răspunsul în modul respectiv.

În condițiile unor măsurări corecte, *înclinarea acestui diametru constituie o dovadă a existenței amortizării neproporționale*. (După cum s-a arătat în § 5.3.5, la sistemele cu amortizare proporțională și rezonanțe nu foarte apropiate, diametrele cercurilor modale sînt paralele cu axa imaginară).

Factorul de amortizare g_r se poate calcula utilizînd una din formulele (5.20), (5.97) sau (5.98).

Dacă echipamentul de măsură folosit nu conferă o rezoluție în frecvență bună, localizarea rezonanței prin metoda Kennedy-Pancu nu se poate face foarte precis, în special la sisteme slab amortizate. În aceste cazuri se recomandă *metoda componentelor vectoriale maxime* [63].

Pentru un mod de vibrație suficient de „separat” de celelalte, pe diagrama polară corespunzătoare se pot determina pulsațiile ω_I și ω_{III} la care partea reală a receptanței are valori extreme, precum și pulsația ω_{II} , la care componenta imaginară are o valoare extremă (fig. 5.34). Se presupune că în vecinătatea lui ω_r , mai precis în intervalul $\omega_I - \omega_{III}$, contribuția la răspunsul total a celorlalte moduri de vibrație este constantă.

Între unghiurile care definesc pozițiile razelor vectoriale corespunzătoare pulsațiilor ω_I , ω_{II} , ω_{III} se stabilesc relațiile [96]

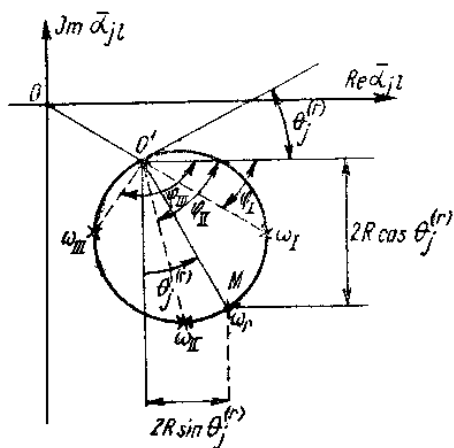


Fig. 5.34

$$\varphi_I = \varphi_{II} - \frac{\pi}{4}, \quad (5.118)$$

$$\varphi_{III} = \varphi_{II} + \frac{\pi}{4}. \quad (5.119)$$

Din relația (5.118) se obține $\varphi_I + \theta_j^{(r)} = \varphi_{II} + \theta_j^{(r)} - \frac{\pi}{4}$, deci

$$\operatorname{tg}(\varphi_I + \theta_j^{(r)}) = \operatorname{tg} \left[(\varphi_{II} + \theta_j^{(r)}) - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_{II} + \theta_j^{(r)}) - 1}{\operatorname{tg}(\varphi_{II} + \theta_j^{(r)}) + 1} \quad (5.120)$$

sau, utilizând expresia (3.202),

$$\frac{g_r}{1 - \frac{\omega_I^2}{\omega_r^2}} = \frac{g_r - \left(1 - \frac{\omega_{II}^2}{\omega_r^2}\right)}{g_r + \left(1 - \frac{\omega_{II}^2}{\omega_r^2}\right)} \quad (5.121)$$

deoarece distribuția pulsațiilor este aceeași ca la cercul nerotit.

Relația (5.121) se mai scrie sub forma

$$\left(\frac{\omega_I}{\omega_{II}}\right)^2 = \left(\frac{\omega_r}{\omega_{II}}\right)^2 \left[1 + g_r \frac{1 + g_r - \left(\frac{\omega_{II}}{\omega_r}\right)^2}{1 - g_r - \left(\frac{\omega_{II}}{\omega_r}\right)^2} \right] \quad (5.122)$$

Analog, din relația (5.119) se deduce

$$\left(\frac{\omega_{III}}{\omega_{II}}\right)^2 = \left(\frac{\omega_r}{\omega_{II}}\right)^2 \left[1 - g_r \frac{1 - g_r - \left(\frac{\omega_{II}}{\omega_r}\right)^2}{1 + g_r - \left(\frac{\omega_{II}}{\omega_r}\right)^2} \right] \quad (5.123)$$

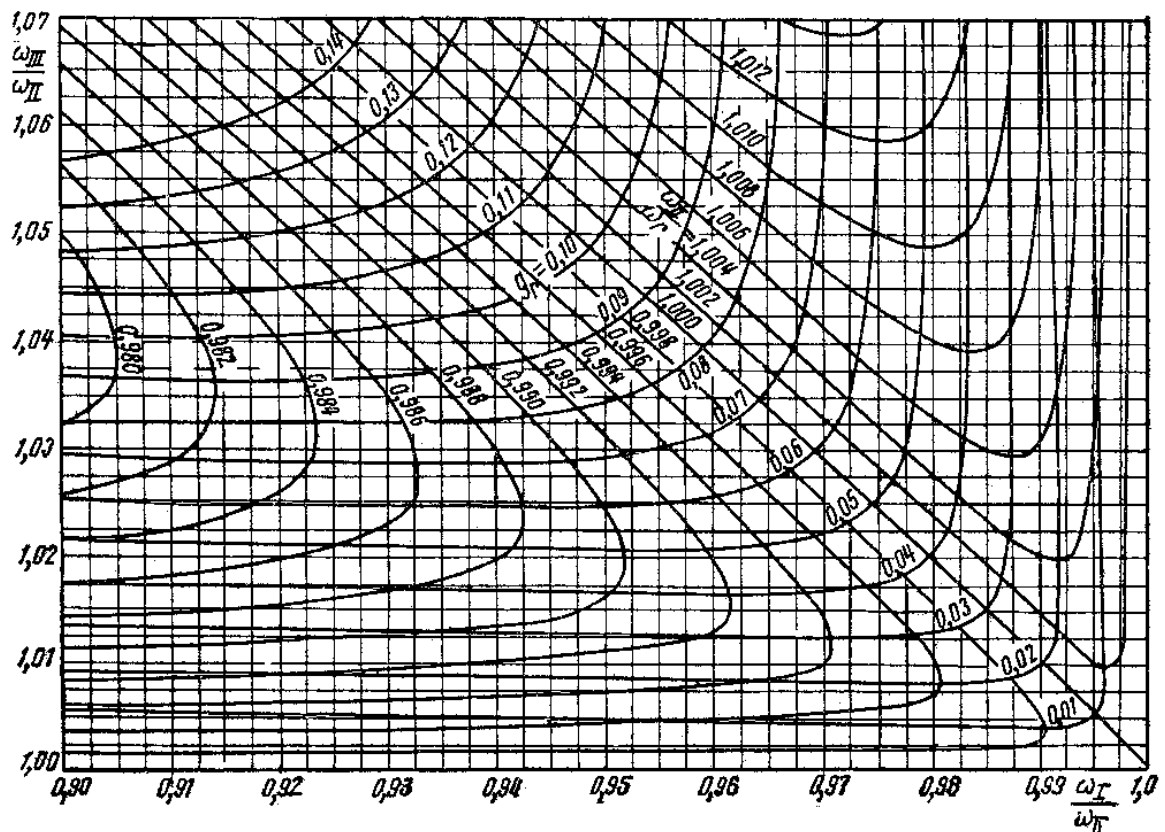


Fig. 5.35

Cu relațiile (5.122) și (5.123) s-a construit o diagramă (fig. 5.35) cu ajutorul căreia se pot calcula ω_r și g_r pe baza valorilor ω_I , ω_{II} și ω_{III} . În acest scop, s-au calculat rapoartele ω_I/ω_{II} și ω_{III}/ω_{II} pentru diferite valori

$g_r, \frac{\omega_r}{\omega_{II}}$ și pentru fiecare pereche de valori s-a obținut un punct pe graficul din figura 5.35. Apoi s-au unit punctele cu $g_r = \text{const.}$ și cele cu $\omega_{II}/\omega_r = \text{const.}$

Deoarece relațiile (5.122) și (5.123) sînt independente de unghiul $\theta_j^{(r)}$, rezultă că metoda se aplică cu bune rezultate și atunci cînd diagrama este rotită datorită unor defazaaje constante introduse de echipamentul de măsură.

Pe baza valorii ω_r se poate localiza precis punctul M pe bucla diagramei polare și, după trasarea diametrului $O'M$, se poate măsura unghiul $\theta_j^{(r)}$. Dacă localizarea punctului M nu se poate face cu precizie, existînd prea puține puncte pe diagramă, unghiul $\theta_j^{(r)}$ se poate calcula cu relația

$$\theta_j^{(r)} = \text{arctg} \frac{2 \frac{g_r}{1 - \frac{\omega_{II}^2}{\omega_r^2}}}{1 - \left(\frac{g_r}{1 - \frac{\omega_{II}^2}{\omega_r^2}} \right)^2} \quad (5.124)$$

care rezultă din condiția ca

$$\frac{\partial}{\partial \omega} (\mathcal{I}m \bar{\alpha}_{ji}^{(r)}) = 0 \text{ la } \omega = \omega_{II}.$$

Dacă se evaluează expresia (5.121) la pulsația $\omega = \omega_r$, rezultă

$$\bar{\alpha}_{ji}^{(r)}|_{\omega=\omega_r} = \frac{x_j^{(r)} + iy_j^{(r)}}{ig_r} = \frac{y_j^{(r)}}{g_r} - i \frac{x_j^{(r)}}{g_r}. \quad (5.125)$$

Din figura 5.34, măsurînd diametrul $2R$ și unghiul $\theta_j^{(r)}$, se calculează

$$\frac{y_j^{(r)}}{g_r} = 2R \sin \theta_j^{(r)}, \quad (5.126)$$

$$\frac{x_j^{(r)}}{g_r} = 2R \cos \theta_j^{(r)}. \quad (5.127)$$

Dacă se notează $\bar{M}_r = 1$, din ecuația (3.200) rezultă

$$w_i^{(r)} w_j^{(r)} = \omega_r^2 (x_j^{(r)} + iy_j^{(r)}). \quad (5.128)$$

Măsurînd receptanța directă în punctul de excitație, se calculează

$$w_i^{(r)} w_i^{(r)} = \omega_r^2 (x_i^{(r)} + iy_i^{(r)}). \quad (5.129)$$

Din relația (5.129) se determină $w_l^{(r)}$, apoi din relațiile (5.128), corespunzătoare diverselor puncte j , se determină $w_j^{(r)}$ ($j = 1, 2, \dots, j, \dots, N$, $j \neq l$), deci vectorul modal $\{w^{(r)}\}$. Cu vectorii $\{w^{(r)}\}$ drept coloane se formează matricea modală $[w]$. Dacă aceasta este pătrată și nesingulară, se pot stabili relațiile

$$[M] = [w]^{-T} [\bar{M}_r] [w]^{-1}, \quad [K + iH] = [w]^{-T} [\bar{\lambda}_r \bar{M}_r] [w]^{-1}.$$

5.4.1.2. Metoda eliminării matricii modale

O metodă analitico-experimentală a fost propusă de Natke [78] ca o generalizare a metodei prezentate în § 5.3.4.7. pentru sisteme cu amortizare proporțională histeretică.

Receptanța de transfer complexă (3.199) se mai scrie

$$\bar{\alpha}_{jl} = \sum_{r=1}^N \frac{\bar{x}_j^{(r)}}{\bar{\lambda}_r - \omega^2} \quad (5.130)$$

unde s-a notat

$$\bar{x}_j^{(r)} = \frac{w_l^{(r)} w_j^{(r)}}{\bar{M}_r}. \quad (5.131)$$

Matricea coloană a receptanțelor complexe (în cazul excitației în punctul l) este formată din N_m elemente, corespunzătoare celor $N_m > N$ puncte de măsură

$$\{\bar{\alpha}_l\} = \{\bar{\alpha}_{1l}, \bar{\alpha}_{2l}, \dots, \bar{\alpha}_{N_m l}\}^T = \sum_{r=1}^N \frac{\{\bar{x}^{(r)}\}}{\bar{\lambda}_r - \omega^2} \quad (5.132)$$

unde

$$\{\bar{x}^{(r)}\} = \frac{w_l^{(r)}}{\bar{M}_r} \{w^{(r)}\}. \quad (5.133)$$

Se aleg două grupuri de pulsații excitatoare ($\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{N_f}$) și ($\bar{\omega}_{N_f+1}, \dots, \bar{\omega}_{2N_f}$) și se măsoară valorile receptanțelor complexe (5.130) la aceste pulsații. Metoda impune ca $N_f = N$.

Dacă se formează matricele

$$[\bar{\alpha}^I] = [\{\bar{\alpha}_l(\bar{\omega}_1)\} \quad \{\bar{\alpha}_l(\bar{\omega}_2)\} \quad \dots \quad \{\bar{\alpha}_l(\bar{\omega}_{N_f})\}], \quad (5.134)$$

$$[\bar{\alpha}^{II}] = [\{\bar{\alpha}_l(\bar{\omega}_{N_f+1})\} \quad \{\bar{\alpha}_l(\bar{\omega}_{N_f+2})\} \quad \dots \quad \{\bar{\alpha}_l(\bar{\omega}_{2N_f})\}], \quad (5.135)$$

$$[\bar{x}] = [\{\bar{x}^{(1)}\} \quad \{\bar{x}^{(2)}\} \quad \dots \quad \{\bar{x}^{(N_f)}\}], \quad (5.136)$$

din relația (5.132) rezultă

$$[\bar{\alpha}^I] = [\bar{x}] [\Lambda^I], \quad (5.137)$$

$$[\bar{\alpha}^{II}] = [\bar{x}] [\Lambda^{II}], \quad (5.138)$$

unde

$$[\Lambda^I] = [\Lambda_{rs}], \quad \Lambda_{rs} = \frac{1}{\bar{\lambda}_r - \bar{\omega}_s^2}, \quad (r, s = 1, \dots, N) \quad (5.139)$$

$$[\Lambda^{II}] = [\Lambda_{r, N_f+s}], \quad \Lambda_{r, N_f+s} = \frac{1}{\bar{\lambda}_r - \bar{\omega}_{N_f+s}^2}, \quad (r, s = 1, \dots, N). \quad (5.140)$$

Se elimină matricea modală (5.136) între relațiile (5.137) și (5.138). Deoarece, în general, matricele $[\bar{\alpha}^I]$, $[\bar{\alpha}^{II}]$ și $[\bar{x}]$ nu sînt pătrate, se procedează ca la § 5.3.4.7.

Din relația (5.137) rezultă (deoarece $[\Lambda^I]$ este pătrată)

$$[\bar{\alpha}^I] [\Lambda^I]^{-1} = [\bar{x}]. \quad (5.141)$$

Înlocuind (5.141) în (5.138), se obține

$$[\bar{\alpha}^{II}] = [\bar{\alpha}^I] [\Lambda^I]^{-1} [\Lambda^{II}].$$

Înmulțind la stînga cu transpusa matricei $[\bar{\alpha}^I]$ rezultă

$$[\bar{\alpha}^I]^T [\bar{\alpha}^{II}] = [\bar{\alpha}^I]^T [\bar{\alpha}^I] [\Lambda^I]^{-1} [\Lambda^{II}].$$

Se înmulțește la stînga cu $[[\bar{\alpha}^I]^T [\bar{\alpha}^I]]^{-1}$ și se obține

$$[[\bar{\alpha}^I]^T [\bar{\alpha}^I]]^{-1} [\bar{\alpha}^I]^T [\bar{\alpha}^{II}] = [\Lambda^I]^{-1} [\Lambda^{II}].$$

Se înmulțește la stînga cu $[\Lambda^I]$, rezultînd

$$[\Lambda^{II}] = [\Lambda^I] [\bar{z}] \quad (5.142)$$

unde

$$[\bar{z}] = [\bar{z}_{ks}] = [[\bar{\alpha}^I]^T [\bar{\alpha}^I]]^{-1} [\bar{\alpha}^I]^T [\bar{\alpha}^{II}] \quad (5.143)$$

este o matrice cu elemente complexe \bar{z}_{ks} cunoscută.

Relația (5.142) reprezintă un sistem de N^2 ecuații, cu N necunoscute $\bar{\lambda}_r$ [78].

Elementul (r, s) al matricei $[\Lambda^{II}]$ are expresia

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_r - \bar{\omega}_N^2} = \sum_{k=1}^N \frac{\bar{z}_{ks}}{\bar{\lambda}_r - \bar{\omega}_k^2} \quad (r, s = 1, 2, \dots, N) \quad (5.144)$$

Rezultă că pentru fiecare indice s se obține o ecuație de gradul N în $\bar{\lambda}_r$ cu coeficienți complecși, care se mai scrie

$$\prod_{k=1}^N (\bar{\lambda}_r - \bar{\omega}_k^2) - (\bar{\lambda}_r - \bar{\omega}_{N+s}^2) \sum_{k=1}^N \prod_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq k}}^N (\bar{\lambda}_r - \bar{\omega}_\sigma^2) \bar{z}_{ks} = 0. \quad (5.145)$$

Soluțiile ecuațiilor (5.145) sînt valorile proprii $\bar{\lambda}_r$, care, conform relației (3.198), dau pulsațiile proprii ω_r și factorii de amortizare g_r .

Valorile $\bar{\lambda}_r$ sînt în general dependente de s , astfel că este necesară o prelucrare statistică a rezultatelor. Dacă se consideră o singură valoare s , sînt necesare măsurări la $(N + 1)$ pulsații excitatoare. Matricea modală se calculează apoi din relația (5.141).

5.4.2 Sisteme cu amortizare viscoasă

5.4.2.1. Metoda diagramelor polare

Dacă se notează

$$\delta_{ji}^{(r)} = N_{ji}^{(r)} + iP_{ji}^{(r)} \quad (5.146)$$

și se folosește notația (3.163), receptanța de transfer a unui sistem liniar, cu amortizare viscoasă neproportională, excitat într-un singur punct (3.186), se scrie sub forma

$$\bar{\alpha}_{ji} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{N_{ji}^{(r)} + iP_{ji}^{(r)}}{i\omega + n_r - i\mu_r} + \frac{N_{ji}^{(r)} - iP_{ji}^{(r)}}{i\omega + n_r + i\mu_r} \right) \quad (5.147)$$

sau

$$\bar{\alpha}_{ji} = \sum_{r=1}^N \frac{\sin \bar{\varphi}_r e^{-i\bar{\varphi}_r}}{n_r} \left[\frac{1}{\omega} (N_{ji}^{(r)} n_r - P_{ji}^{(r)} \mu_r) + iN_{ji}^{(r)} \right], \quad (5.148)$$

unde

$$\bar{\varphi}_r = \arctg \frac{\tau_r \Omega_r}{1 - \Omega_r^2}, \quad \Omega_r = \frac{\omega}{\omega_r}, \quad \tau_r = \frac{2n_r}{\omega_r}. \quad (5.149)$$

Se presupune că în vecinătatea pulsației $\omega = \omega_r$, toți termenii din suma (5.148) pot fi considerați constanți, cu excepția termenului de ordinul r . Fie $(x_0 + iy_0)$ contribuția termenilor „nerezonanți”. Dacă se notează

$$x^{(r)} + iy^{(r)} = \frac{\sin \bar{\varphi}_r e^{-i\bar{\varphi}_r}}{n_r} \left[\frac{1}{\omega} (N_{ji}^{(r)} n_r - P_{ji}^{(r)} \mu_r) + iN_{ji}^{(r)} \right], \quad (5.150)$$

rezultă

$$\bar{\alpha}_{ji} = x^{(r)} + iy^{(r)} + x_0 + iy_0. \quad (5.151)$$

La $\omega = \omega_r$

$$(x^{(r)} + iy^{(r)})_{\omega=\omega_r} = \frac{N_{ji}^{(r)}}{n_r} - i \frac{N_{ji}^{(r)} n_r - P_{ji}^{(r)} \mu_r}{\omega_r n_r} \quad (5.152)$$

deci

$$\begin{aligned} [\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{ji}) - x_0] + i[\operatorname{Im}(\bar{\alpha}_{ji}) - y_0] &= x^{(r)} + iy^{(r)} = \\ &= -\sin \bar{\varphi}_r e^{-i\bar{\varphi}_r} \left[\frac{1}{\Omega_r} (y^{(r)})_{\omega=\omega_r} - i(x^{(r)})_{\omega=\omega_r} \right]. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Dacă se notează

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi}_r = t_r, \quad (5.154)$$

expresia (5.153) devine

$$x^{(r)} + iy^{(r)} = - \frac{t_r}{1 + t_r^2} (1 - it_r) \left[\frac{1}{\Omega_r} (y^{(r)})_{\omega=\omega_r} - i(x^{(r)})_{\omega=\omega_r} \right] \quad (5.155)$$

deci

$$x^{(r)} = \frac{t_r}{1 + t_r^2} \left[t_r(x^{(r)})_{\omega=\omega_r} - \frac{1}{\Omega_r} (y^{(r)})_{\omega=\omega_r} \right], \quad (5.156)$$

$$y^{(r)} = \frac{t_r}{1 + t_r^2} \left[(x^{(r)})_{\omega=\omega_r} + \frac{t_r}{\Omega_r} (y^{(r)})_{\omega=\omega_r} \right]. \quad (5.157)$$

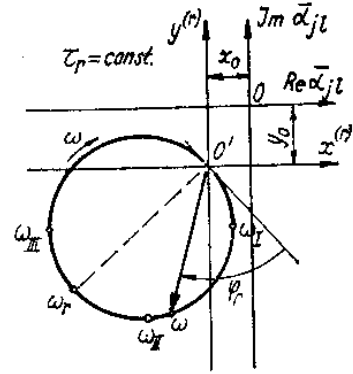


Fig. 5.36

Dacă se reprezintă în planul complex expresia (5.153), se obține diagrama polară din figura 5.36, care este foarte apropiată de un cerc. Metoda de identificare propusă de Woodcock [137] folosește valorile pulsației ω la care componentele vectoriale $\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{j1})$ și $\operatorname{Im}(\bar{\alpha}_{j1})$ au valori extreme. Acestea sînt aceleași cu valorile pulsațiilor la care componentele vectoriale $x^{(r)} \equiv \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{j1}) - x_0$ și $y^{(r)} \equiv \operatorname{Im}(\bar{\alpha}_{j1}) - y_0$ au valori extreme.

Din condiția $\frac{dx^{(r)}}{d\Omega_r} = 0$, rezultă

$$\Omega_{r, \text{I,III}}^2 = \frac{1 \mp \tau_r \sqrt{1 + \left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}} \right)_{\omega=\omega_r}^2 + \tau_r \left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}} \right)_{\omega=\omega_r}}}{1 + \tau_r \left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}} \right)_{\omega=\omega_r}} \quad (5.158)$$

unde s-a notat

$$\Omega_{r, \text{I}} = \frac{\omega_{\text{I}}}{\omega_r}, \quad \Omega_{r, \text{III}} = \frac{\omega_{\text{III}}}{\omega_r}. \quad (5.159)$$

în care ω_{I} și ω_{III} sînt pulsațiile la care componenta reală a răspunsului are valori extreme.

Din condiția $\frac{dy^{(r)}}{d\Omega_r} = 0$, rezultă

$$\left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}} \right)_{\omega=\omega_r} = \frac{t_r [t_r^2 - 1 - \Omega_{r, \text{II}}^2 (t_r^2 + 3)]}{\Omega_{r, \text{II}} (1 + \Omega_{r, \text{II}}^2) (1 - t_r^2)} \quad (5.160)$$

unde s-a notat

$$t_{r_2} = \frac{\tau_r \Omega_{r_{II}}}{1 - \Omega_{r_{II}}^2}, \quad \Omega_{r_{II}} = \frac{\omega_{II}}{\omega_r}, \quad (5.161)$$

în care ω_{II} este pulsația la care componenta imaginară a răspunsului are valoare maximă.

Pe baza relațiilor (5.158) și (5.160) s-a construit diagrama din figura 5.37, analogă figurii 5.35 construite pentru sisteme cu amortizare histerețică. Folosind diferite valori τ_r și $\Omega_{r_{II}}$, din relația (5.160) se calculează $\left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}}\right)_{\omega=\omega_r}$, apoi din relația (5.158) rezultă Ω_{r_I} și $\Omega_{r_{III}}$. Pentru fiecare pereche de valori $\frac{\Omega_{r_{III}}}{\Omega_{r_{II}}}$ și $\frac{\Omega_{r_I}}{\Omega_{r_{II}}}$ s-a marcat câte un punct pe graficul din figura 5.37, apoi s-au unit punctele cu $\tau_r = \text{const.}$ și cele cu $\Omega_{r_{II}} = \text{const.}$

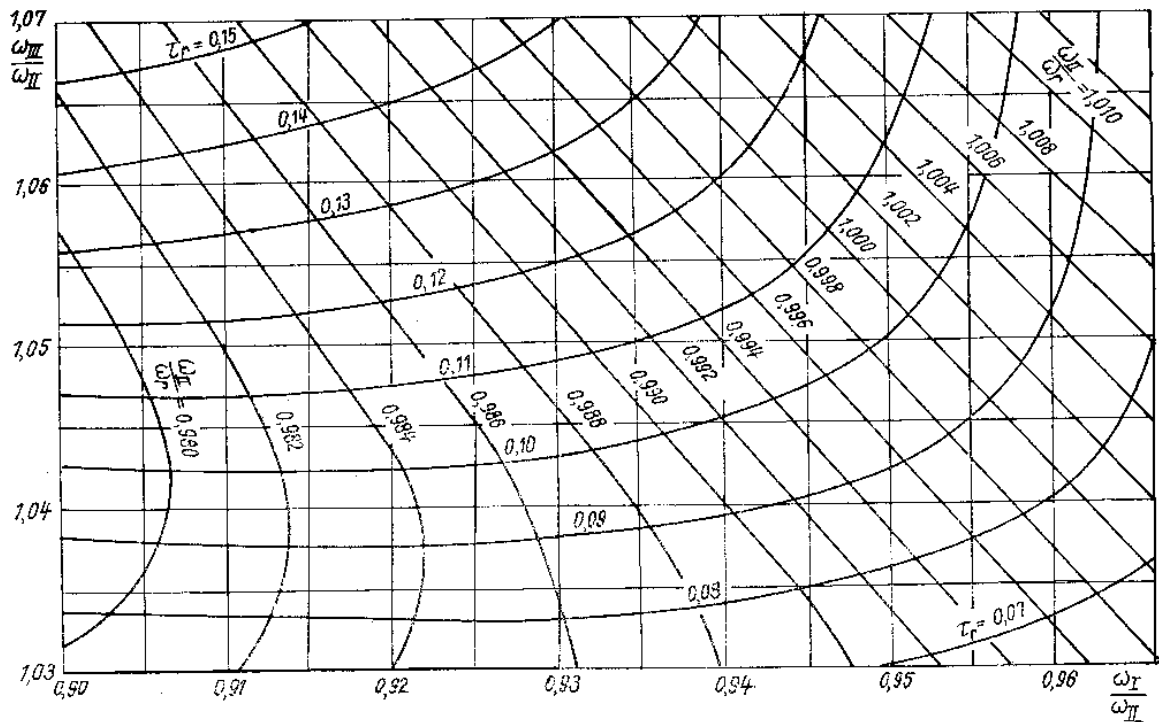


Fig. 5.37

Folosind diagrama din figura 5.37 se pot calcula τ_r și ω_r pe baza valorilor ω_I , ω_{II} și ω_{III} determinate experimental. Apoi din relațiile (3.164) și (3.165) rezultă n_r și μ_r , deci σ_r .

În continuare, dacă pe diagrama polară din figura 5.36 se măsoară raza de curbură ρ_{ω_r} în punctul de pulsație ω_r , se poate calcula $(x^{(r)} + iy^{(r)})_{\omega=\omega_r}$.

Într-adevăr, se poate stabili relația

$$\begin{aligned} \rho_{\omega_r}^2 &= \frac{1 + \left(\frac{dy^{(r)}}{dx^{(r)}} \right)_{\omega=\omega_r}^2}{\left(\frac{d^2y^{(r)}}{dx^{(r)2}} \right)_{\omega=\omega_r}^2} = \\ &= \frac{(y^{(r)})_{\omega=\omega_r}^2}{4} \frac{\left\{ 1 + \left[\frac{\tau_r}{2} + \left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}} \right)_{\omega=\omega_r} \right]^2 \right\}^3}{\left\{ 1 - \frac{\tau_r^2}{8} + \left[\frac{\tau_r}{2} + \left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}} \right)_{\omega=\omega_r} \right]^2 \right\}^2} \end{aligned} \quad (5.162).$$

de unde rezultă $(y^{(r)})_{\omega=\omega_r}$, apoi $(x^{(r)})_{\omega=\omega_r}$, căci se cunoaște $\left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}} \right)_{\omega=\omega_r}$.

Din relația (5.152) se obține

$$N_{ji}^{(r)} = n_r(x^{(r)})_{\omega=\omega_r}, \quad P_{ji}^{(r)} = \frac{\omega_r n_r}{\mu_r} (y^{(r)})_{\omega=\omega_r} + n_r^2(x^{(r)})_{\omega=\omega_r}, \quad (5.163)$$

deci se cunoaște $\delta_{ji}^{(r)} = N_{ji}^{(r)} + iP_{ji}^{(r)}$.

Dacă se repetă măsurile pentru mai multe puncte j ale structurii, din analiza diagramelor polare corespunzătoare se poate calcula vectorul $\{\delta^{(r)}\} = \{\delta_{11}^{(r)} \dots \delta_{N1}^{(r)}\}^T$ care, conform relației (3.185), este proporțional cu $\{q^{(r)}\}$, vectorul modal de ordinul r .

Din relațiile (3.150) și (3.160) se obține

$$\{q^{(r)}\}^T ([C] + 2\sigma_r[M]) \{q^{(r)}\} = u_r,$$

$$\{q^{(r)}\}^T ([K] - \sigma_r^2[M]) \{q^{(r)}\} = v_r.$$

Introducînd aceste valori în relația (3.161), rezultă

$$([M] \sigma_r^2 + [C] \sigma_r + [K]) \{q^{(r)}\} = \{0\}. \quad (5.164)$$

Combinînd ecuațiile (5.164) pentru toate valorile r , se obțin ecuațiile matriceale

$$[M] [q] [\Sigma]^2 + [C] [q] [\Sigma] + [K] [q] = [0], \quad (5.165)$$

$$[M] [q^*] [\Sigma^*]^2 + [C] [q^*] [\Sigma^*] + [K] [q^*] = [0],$$

unde

$$[q] = [\{q^{(1)}\} \quad \{q^{(2)}\} \dots \{q^{(N)}\}],$$

$$[\Sigma] = \text{diag} [\sigma_r].$$

Prin semnul * s-au notat matricele conjugate complexe iar valorile proprii σ_r au fost aranjate astfel încît fiecare pereche de conjugate complexe conține o valoare din primele N și una din următoarele N valori proprii.

Matricea $[q]$ fiind nesingulară, se poate nota

$$\begin{aligned} [q] [\Sigma] [q]^{-1} &= [X] + i[Y], \\ [q^*] [\Sigma^*] [q^*]^{-1} &= [X] - i[Y], \end{aligned} \quad (5.166)$$

unde $[X]$ și $[Y]$ sînt matrice reale.

Deoarece

$$\begin{aligned} [q] [\Sigma]^2 [q]^{-1} &= ([X] + i[Y])^2, \\ [q^*] [\Sigma^*]^2 [q^*]^{-1} &= ([X] - i[Y])^2, \end{aligned}$$

din ecuațiile (5.165) rezultă

$$\begin{aligned} [C] &= - [M] ([X] + [Y] [X] [Y]^{-1}), \\ [K] &= [M] ([Y]^2 + [Y] [X] [Y]^{-1} [X]), \end{aligned} \quad (5.167)$$

deci se pot determina matricele $[C]$ și $[K]$ dacă se cunoaște matricea $[M]$, precum și valorile proprii σ_r și vectorii proprii $\{q^{(r)}\}$. Pentru acestea din urmă este nevoie de trasarea diagramelor polare în cel puțin N puncte ale structurii.

Metoda se aplică la identificarea sistemelor cu frecvențe proprii relativ depărtate, indiferent de valoarea amortizării din sistem.

Pentru calculul amortizării, pe baza relației (5.158) se mai pot stabili formulele exacte

$$\frac{\omega_{\text{III}}^2 - \omega_{\text{I}}^2}{\omega_{\text{III}}^2 + \omega_{\text{I}}^2} = \tau_r \sqrt{1 + \left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}}\right)_{\omega=\omega_r}^2} - \tau_r \left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}}\right)_{\omega=\omega_r}, \quad (5.168)$$

și

$$\frac{\omega_{\text{III}}^2 + \omega_{\text{I}}^2}{2\omega_r^2} = \frac{1}{1 - \tau_r \left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}}\right)_{\omega=\omega_r}}. \quad (5.169)$$

De asemenea, din relația (5.156), calculînd derivata în raport cu ω , rezultă

$$\tau_r = \frac{2}{\omega_r} \frac{(y^{(r)})_{\omega=\omega_r}}{\left(-\frac{dx^{(r)}}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_r}}. \quad (5.170)$$

La sisteme cu frecvențe proprii depărtate mult între ele, uneori se neglijează contribuția celorlalte moduri de vibrație la răspunsul total în vecinătatea rezonanței într-un anumit mod. Astfel, în zona rezonanței în modul de ordinul r , se consideră

$$x^{(r)} \equiv \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{j1}), \quad y^{(r)} \equiv \operatorname{Im}(\bar{\alpha}_{j1}). \quad (5.171)$$

Dacă $\tau_r \ll \left(\frac{x^{(r)}}{y^{(r)}} \right)_{\omega=\omega_r}$, din relația (5.168) se deduce [141]

$$\frac{\omega_{\text{III}}^2 - \omega_{\text{I}}^2}{\omega_{\text{III}}^2 + \omega_{\text{I}}^2} = \tau_r \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{j1})}{\operatorname{Im}(\bar{\alpha}_{j1})} \right)_{\omega=\omega_r}^2}, \quad (5.172)$$

care în cazul amortizării proporționale (cînd $\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{j1})_{\omega=\omega_r} = 0$) se confundă cu relația (2.76).

Cu notațiile (5.171), relația (5.170) devine [141]

$$\tau_r = \frac{2}{\omega_r} \frac{[\operatorname{Im}(\bar{\alpha}_{j1})]_{\omega=\omega_r}}{\left\{ -\frac{d[\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{j1})]}{d\omega} \right\}_{\omega=\omega_r}}, \quad (5.173)$$

fiind identică cu formula (2.79), stabilită pentru sisteme cu amortizare proporțională.

În lucrarea [42] analiza diagramelor polare se face printr-un procedeu numeric iterativ, bazat pe minimizarea erorii medii pătratice a răspunsului.

5.4.2.2. Metoda eliminării matricei modale

La structuri cu frecvențe proprii relativ apropiate, contribuția termenilor „nerezonanți” la răspunsul în vecinătatea unei rezonanțe nu mai este constantă și metoda precedentă duce la erori. Se recurge la metoda eliminării matricei modale.

Spre deosebire de metoda precedentă, unde se impune măsurarea răspunsului în N puncte diferite, aici este suficientă măsurarea răspunsului într-un singur punct, însă la $2N$ frecvențe diferite, preferabil câte două în fiecare zonă de rezonanță.

Din relațiile (5.148), (5.150) și (5.155) se obține următoarea expresie a receptanței de transfer complexe

$$\bar{\alpha}_{j1} = \sum_{r=1}^N \frac{t_r(it_r - 1)}{1 + t_r^2} \left[\frac{1}{\Omega_r} (y^{(r)})_{\omega=\omega_r} - i(x^{(r)})_{\omega=\omega_r} \right]. \quad (5.174)$$

Cele două componente vectoriale se pot scrie sub forma

$$\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{j1}) = \alpha_{j1R} = \sum_{r=1}^N [\bar{a}_r (x^{(r)})_{\omega=\omega_r} + \bar{B}_r (y^{(r)})_{\omega=\omega_r}], \quad (5.175)$$

$$\operatorname{Im}(\bar{\alpha}_{j1}) = \alpha_{j1I} = \sum_{r=1}^N [\bar{b}_r (x^{(r)})_{\omega=\omega_r} + \bar{A}_r (y^{(r)})_{\omega=\omega_r}], \quad (5.176)$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned}\bar{a}_r &= \frac{t_r^2}{1 + t_r^2}, & \bar{A}_r &= \frac{1}{\Omega_r} \bar{a}_r = \frac{t_r^2}{\Omega_r(1 + t_r^2)}, \\ \bar{b}_r &= \frac{t_r}{1 + t_r^2}, & \bar{B}_r &= \frac{1}{\Omega_r} \bar{b}_r = \frac{t_r}{\Omega_r(1 + t_r^2)}.\end{aligned}\quad (5.177)$$

Evaluînd expresiile (5.175) și (5.176) la $f = N$ pulsații excitatoare, rezultă

$$\{\alpha_{jI_R}(\bar{\omega}_f)\} = \sum_{r=1}^N (\{\bar{a}_r(\bar{\omega}_f)\} x_{\omega_r}^{(r)} + \{\bar{B}_r(\bar{\omega}_f)\} y_{\omega_r}^{(r)}) = [\bar{a}_{fr}] \{x_{\omega_r}^{(r)}\} + [\bar{B}_{fr}] \{y_{\omega_r}^{(r)}\}, \quad (5.178)$$

$$\{\alpha_{jI_I}(\bar{\omega}_f)\} = \sum_{r=1}^N (\{\bar{b}_r(\bar{\omega}_f)\} x_{\omega_r}^{(r)} + \{\bar{A}_r(\bar{\omega}_f)\} y_{\omega_r}^{(r)}) = [\bar{b}_{fr}] \{x_{\omega_r}^{(r)}\} + [\bar{A}_{fr}] \{y_{\omega_r}^{(r)}\}, \quad (5.179)$$

sau

$$\begin{Bmatrix} \{\alpha_{jI_R}(\bar{\omega}_f)\} \\ \{\alpha_{jI_I}(\bar{\omega}_f)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{a}_{fr}] & [\bar{B}_{fr}] \\ [\bar{b}_{fr}] & [\bar{A}_{fr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_{\omega_r}^{(r)}\} \\ \{y_{\omega_r}^{(r)}\} \end{Bmatrix}, \quad (5.180)$$

unde matricele pătrate sînt de forma

$$[\bar{a}_{fr}] = [\{\bar{a}_1(\bar{\omega}_f)\} \quad \{\bar{a}_2(\bar{\omega}_f)\} \quad \dots \quad \{\bar{a}_N(\bar{\omega}_f)\}] \quad (5.181)$$

iar matricele coloană — de forma

$$\{\alpha_{jI_R}(\bar{\omega}_f)\} = \{\alpha_{jI_R}(\bar{\omega}_1) \quad \alpha_{jI_R}(\bar{\omega}_2) \quad \dots \quad \alpha_{jI_R}(\bar{\omega}_N)\}^T, \quad (5.182)$$

$$\{x_{\omega_r}^{(r)}\} = \{x_{\omega_1}^{(1)} \quad x_{\omega_2}^{(2)} \quad \dots \quad x_{\omega_N}^{(N)}\}^T. \quad (5.183)$$

Evaluînd expresiile (5.175) și (5.176) la alte N pulsații excitatoare ($f = N+1, \dots, 2N$), rezultă

$$\begin{Bmatrix} \{\alpha_{jI_R}(\bar{\omega}_{N+f})\} \\ \{\alpha_{jI_I}(\bar{\omega}_{N+f})\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{a}_{N+f,r}] & [\bar{B}_{N+f,r}] \\ [\bar{b}_{N+f,r}] & [\bar{A}_{N+f,r}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_{\omega_r}^{(r)}\} \\ \{y_{\omega_r}^{(r)}\} \end{Bmatrix}, \quad (5.184)$$

Eliminînd matricea modală între relațiile (5.180) și (5.184), rezultă

$$\begin{Bmatrix} \{\alpha_{jI_R}(\bar{\omega}_f)\} \\ \{\alpha_{jI_I}(\bar{\omega}_f)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{a}_{fr}] & [\bar{B}_{fr}] \\ [\bar{b}_{fr}] & [\bar{A}_{fr}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{a}_{N+f,r}] & [\bar{B}_{N+f,r}] \\ [\bar{b}_{N+f,r}] & [\bar{A}_{N+f,r}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{\alpha_{jI_R}(\bar{\omega}_{N+f})\} \\ \{\alpha_{jI_I}(\bar{\omega}_{N+f})\} \end{Bmatrix}, \quad (5.185)$$

unde matricele coloană conțin elemente care se măsoară experimental.

Ecuatia matriceală (5.185) conține $2N$ ecuații algebrice neliniare cu $2N$ necunoscute τ_r și ω_r ($r = 1, \dots, N$), care se pot rezolva printr-o metodă de tip Newton-Raphson. Calculele se simplifică ținând cont de relațiile dintre elementele matricelor pătrate din (5.185), care rezultă direct din notațiile (5.177).

După determinarea valorilor τ_r și ω_r , din relația (5.180) se obțin vectorii modali.

5.5. Identificarea sistemelor puternic amortizate

La sisteme sau subsisteme puternic amortizate, la care nu se pot distinge modurile de vibrație, identificarea are drept prim scop determinarea coeficienților funcției de transfer, exprimată sub forma unui raport de polinoame funcție de pulsație.

Ecuatia diferențială care descrie comportarea unui sistem liniar oarecare poate fi pusă sub forma

$$(Q_n s^n + Q_{n-1} s^{n-1} + \dots + Q_1 s + 1) y = (P_m s^m + P_{m-1} s^{m-1} + \dots + P_1 s + P_0) x,$$

unde x și y sînt respectiv mărimile de intrare și de ieșire, Q_r și P_r sînt coeficienți constanți (invarianți în timp), s este operatorul $\frac{d}{dt}$, iar $n > m$.

Funcția de transfer a sistemului (transmitanța) se scrie

$$H(s) = \frac{P_0 + P_1 s + \dots + P_{m-1} s^{m-1} + P_m s^m}{1 + Q_1 s + \dots + Q_{n-1} s^{n-1} + Q_n s^n} = \frac{\sum_{r=0}^m P_r s^r}{1 + \sum_{r=1}^n Q_r s^r}. \quad (5.186)$$

Transmitanța izocronă, corespunzînd regimului permanent armonic, se deduce din relația (5.186), înlocuind $s = i\omega$:

$$H(i\omega) = \frac{P_0 + P_1 \cdot i\omega + P_2 (i\omega)^2 + \dots + P_m (i\omega)^m}{1 + Q_1 i\omega + Q_2 (i\omega)^2 + \dots + Q_n (i\omega)^n}. \quad (5.187)$$

5.5.1. Metode de identificare directă

5.5.1.1. Metode analitice

Dacă se separă partea reală și cea imaginară ale transmitanței (5.187) se poate scrie

$$\begin{aligned} H(i\omega) &= \frac{(P_0 - P_2 \omega^2 + P_4 \omega^4 \dots) + i(P_1 \omega - P_3 \omega^3 + P_5 \omega^5 \dots)}{(1 - Q_2 \omega^2 + Q_4 \omega^4 \dots) + i(Q_1 \omega - Q_3 \omega^3 + Q_5 \omega^5 \dots)} = \\ &= \frac{P_R(\omega) + i P_I(\omega)}{Q_R(\omega) + i Q_I(\omega)} = \mathcal{R}e(\omega) + i \mathcal{I}m(\omega). \end{aligned} \quad (5.188)$$

Se pot stabili deci relațiile

$$\operatorname{Re}(\omega) Q_R(\omega) - \operatorname{Im}(\omega) Q_I(\omega) = P_R(\omega), \quad (5.189)$$

$$\operatorname{Re}(\omega) Q_I(\omega) + \operatorname{Im}(\omega) Q_R(\omega) = P_I(\omega).$$

La o anumită pulsație ω_f , relațiile (5.189) se scriu

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\omega_f) (1 - Q_2\omega_f^2 + Q_4\omega_f^4 \dots) - \operatorname{Im}(\omega_f) (Q_1\omega_f - Q_3\omega_f^3 + Q_5\omega_f^5 \dots) = \\ = (P_0 - P_2\omega_f^2 + P_4\omega_f^4 \dots), \end{aligned} \quad (5.190)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\omega_f) (Q_1\omega_f - Q_3\omega_f^3 + Q_5\omega_f^5 \dots) + \operatorname{Im}(\omega_f) (1 - Q_2\omega_f^2 + Q_4\omega_f^4 \dots) = \\ = (P_1\omega_f - P_3\omega_f^3 + P_5\omega_f^5 \dots). \end{aligned}$$

Ecuțiile (5.150) conțin n necunoscute Q_r și $(m+1)$ necunoscute P_r , deci în total $(n+m+1)$ necunoscute. Pentru calculul coeficienților Q_r și P_r sînt deci necesare $(n+m+1)$ ecuații. Acestea se obțin calculînd relațiile (5.190) la $\frac{n+m+1}{2}$ valori diferite ale pulsației ω_f . Este nevoie deci fie de diagramele componentelor vectoriale ale funcției de răspuns în frecvență $H(i\omega)$, fie de perechi de valori ale componentelor $\operatorname{Re}(\omega)$ și $\operatorname{Im}(\omega)$ măsurate la $\frac{n+m+1}{2}$ pulsații excitatoare [112].

Dacă se dispune doar de o diagramă a modulului funcției $H(i\omega)$, atunci se determină coeficienții funcției

$$\begin{aligned} |H(i\omega)|^2 = H(i\omega)H(-i\omega) &= \frac{P_R^2(\omega) + P_I^2(\omega)}{Q_R^2(\omega) + Q_I^2(\omega)} = \\ &= \frac{p_0 + p_1\omega^2 + \dots + p_m\omega^{2m}}{1 + q_1\omega^2 + \dots + q_n\omega^{2n}}, \end{aligned}$$

care se evaluează la $(n+m+1)$ valori ale pulsației ω .

În ambele cazuri, gradul numitorului și numărătorului trebuie apreciate la începutul calculelor, ceea ce corespunde unei prestructurări a modelului.

5.5.1.2. Metode grafice

Identificarea în domeniul frecvențelor

O metodă de identificare în domeniul frecvențelor, care nu necesită o apreciere prealabilă a structurii sistemului studiat, a fost propusă de Dudnikov [31].

Împărțind numitorul și numărătorul expresiei (5.187) prin $(i\omega)^n$, se obține

$$H(i\omega) = \frac{P_0(i\omega)^{-n} + P_1(i\omega)^{1-n} + \dots + P_{m-1}(i\omega)^{m-1-n} + P_m(i\omega)^{m-n}}{(i\omega)^{-n} + Q_1(i\omega)^{1-n} + \dots + Q_{n-1}(i\omega)^{-1} + Q_n} \quad (5.191)$$

expresie care se notează $H_0(i\omega)$ și se scrie sub forma

$$H_0(i\omega) = A_0 + G_1(i\omega) \quad (5.192)$$

unde A_0 este o constantă.

Se consideră apoi funcția

$$H_1(i\omega) = \frac{1}{G_1(i\omega)} \quad (5.193)$$

care se scrie sub forma

$$H_1(i\omega) = A_1 + B_0(i\omega)^{-1} + G_2(i\omega) \quad (5.194)$$

unde A_1 este o constantă.

Funcția $G_2(i\omega)$ are un numărător de gradul $(2-n)$ și un numitor de gradul $(1-n)$. Inversa ei, $H_2(i\omega)$, se poate scrie

$$H_2(i\omega) = \frac{1}{G_2(i\omega)} = A_2 + B_1(i\omega)^{-1} + G_3(i\omega) \quad (5.195)$$

și așa mai departe.

Aceste operații duc la reprezentarea transmitanței inițiale (5.191) sub forma unei fracții continue

$$H_0(i\omega) = A_0 + \frac{1}{B_0(i\omega)^{-1} + A_1 + \frac{1}{B_1(i\omega)^{-1} + A_2 + \dots + \frac{1}{B_{n-1}(i\omega)^{-1} + A_n}}}. \quad (5.196)$$

Constantele $A_0, B_0, A_1, B_1, \dots, B_{n-1}, A_n$ se determină în modul următor. Se separă partea reală și partea imaginară a funcțiilor $H_r(i\omega)$:

$$H_0(i\omega) = H_{0R}(\omega) + iH_{0I}(\omega),$$

$$H_1(i\omega) = H_{1R}(\omega) + iH_{1I}(\omega),$$

.....

$$H_n(i\omega) = H_{nR}(\omega) + iH_{nI}(\omega).$$

Facem să tindă ω spre zero. În acest caz

$|H_0(i\omega)|$ tinde asimptotic spre $|H_{0R}(\omega)|$ și acesta din urmă, în virtutea relației (5.192), spre $|A_0| = |P_0|$;

$|H_1(i\omega)|$ tinde asimptotic spre $|H_{1I}(\omega)|$ și acesta din urmă, conform relației (5.194), spre $|B_0(i\omega)^{-1}|$;

$|H_1(i\omega) - B_0(i\omega)^{-1}|$ tinde asimptotic spre $H_{1R}(\omega)$, adică spre $|A_1|$;

$|H_2(i\omega)|$ tinde spre $|H_{2I}(\omega)|$, adică spre $|B_1(i\omega)^{-1}|$;

$|H_2(i\omega) - B_1(i\omega)^{-1}|$ tinde spre $|H_{2R}(\omega)|$, adică spre $|A_2|$;

.....

$|H_n(i\omega)|$ tinde spre $|H_{nI}(\omega)|$, adică spre $|B_{n-1}(i\omega)^{-1}|$;

$|H_n(i\omega) - B_{n-1}(i\omega)^{-1}|$ tinde spre $|H_{nR}(\omega)|$, adică spre $|A_n|$.

Se începe prin determinarea constantei A_0 , a cărei valoare absolută este egală cu ordonata în origine a asimptotei spre care tinde curba funcției $|H_{0R}(\omega)|$ când $\omega \rightarrow 0$ (fig. 5.38). Apoi se formează funcția

$$H_1(i\omega) = \frac{1}{G_1(i\omega)} = \frac{1}{H_0(i\omega) - A_0}.$$

Se construiește, în coordonate logaritmice, un grafic al funcției $|H_{1I}(\omega)|$ și se determină asimptota spre care tinde această curbă când $\omega \rightarrow 0$ (fig. 5.39). Asimptota are o pantă (-1) iar ordonata în dreptul abscisei $\omega = 1$ este egală cu $\log |B_0|$.

Se construiește în continuare graficul funcției $|H_{1R}(\omega)|$ pe care se determină $|A_1|$. Se calculează apoi funcția $G_2(i\omega)$ și se construiesc

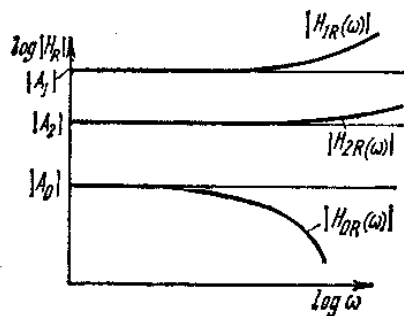


Fig. 5.38

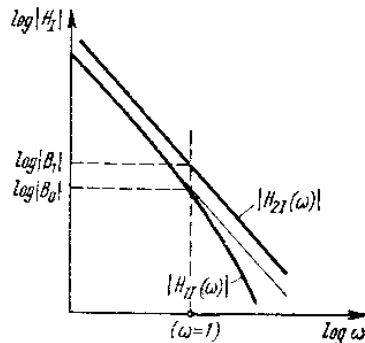


Fig. 5.39

diagramele modulelor părții imaginare și a celei reale, $H_{2I}(\omega)$ și $H_{2R}(\omega)$ ale inversei sale $H_2(i\omega)$, pe baza cărora se determină valorile coeficienților $|B_1|$ și $|A_2|$, și așa mai departe.

Semnele expresiilor A_0 , $i \frac{B_0}{\omega}$, A_1 , ..., $i \frac{B_{n-1}}{\omega}$, A_n se determină din semnele părților imaginare și reală ale funcțiilor care au servit la determinarea lor.

Sfârșitul calculului este marcat de faptul că funcția $G_{n+1}(i\omega)$ este nulă. Odată cunoscuți toți coeficienții, funcția $H_0(i\omega)$ se scrie sub forma (5.196). După reducerea la același numitor, se obține expresia analitică căutată a transmitanței sistemului considerat.

Identificarea în domeniul timpului

O metodă de identificare în domeniul timpului, larg răspândită, este metoda integrării repetate [110, 114].

Pe baza expresiei (5.186) se pot obține următoarele relații

$$J_0 = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = P_0,$$

$$J_1 = \lim_{s \rightarrow 0} H^{(1)}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [J_0 - H(s)] = -P_1 + J_0 Q_1,$$

$$J_2 = \lim_{s \rightarrow 0} H^{(2)}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} [J_1 - H^{(1)}(s)] = P_2 + J_1 Q_1 - J_0 Q_2,$$

.....

$$J_r = \lim_{s \rightarrow 0} H^{(r)}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^r} [J_{r-1} - H^{(r-1)}(s)] =$$

$$= (-1)^r P_r + J_{r-1} Q_1 - J_{r-2} Q_2 + \dots + (-1)^{r-1} J_0 Q_r,$$

unde $P_r = 0$ pentru $r > m$, $P_r = Q_r = 0$ pentru $r > n$.

Cînd $r = m + n$, există $(n + m + 1)$ ecuații pentru calculul celor $(n + m + 1)$ necunoscute $Q_1, \dots, Q_n, P_0, \dots, P_m$.

Coeficienții J_0, \dots, J_r se pot determina prin integrarea repetată a unei funcții de răspuns în timp a sistemului, de exemplu, funcția pondere $h(t)$.

Deoarece

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t), \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} H(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(\tau) d\tau,$$

rezultă

$$J_0 = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t),$$

$$J_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [J_0 - H(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t [J_0 - h(\tau)] d\tau.$$

Coeficientul J_1 este egal cu aria suprafeței hașurate din figura 5.40. Dacă se construiește funcția

$$h_1(t) = \int_0^t [J_0 - h(\tau)] d\tau,$$

atunci

$$J_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [J_1 - H^{(1)}(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t [J_1 - h_1(\tau)] d\tau,$$

deci J_2 este egal cu aria suprafeței hașurate din figura 5.41.

În general, coeficienții J_r sînt egali cu ariile suprafețelor cuprinse între curbele

$$g(t) = h_{r-1}(t) = \int_0^t [J_{r-2} - h_{r-2}(\tau)] d\tau$$

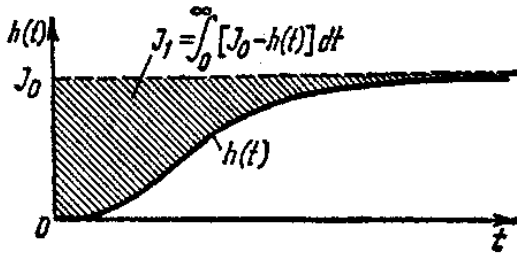


Fig. 5.40

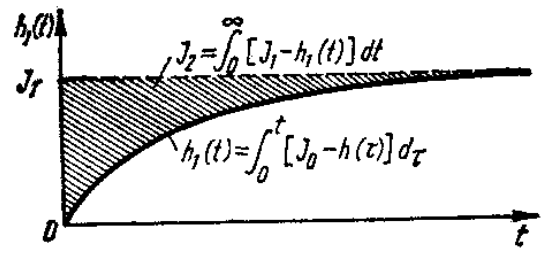


Fig. 5.41

și dreptele paralele la axa absciselor, de ecuație

$$g(t) = J_{r-1},$$

conform relației

$$J_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [J_{r-1} - H^{(r-1)}(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t [J_{r-1} - h_{r-1}(\tau)] d\tau.$$

Metoda dă rezultate bune în cazul sistemelor cu $n \leq 3$.

O altă metodă de identificare în domeniul timpului este *metoda momentelor* [4].

Funcția (5.186) se poate dezvolta într-o serie de forma

$$H(s) = h_\infty - sM_0 + \frac{s^2}{1!} M_1 - \frac{s^3}{2!} M_2 + \dots \quad (5.197)$$

unde

$$M_\nu = \int_0^\infty t^\nu [h_\infty - h(t)] dt$$

este momentul de ordinul ν al funcției $[h_\infty - h(t)]$.

Înlocuind (5.197) în (5.186) se obține

$$\begin{aligned} \left(h_\infty - M_0 s + \frac{M_1}{1!} s^2 - \frac{M_2}{2!} s^3 + \dots \right) (1 + Q_1 s + Q_2 s^2 + \dots + Q_n s^n) = \\ = P_0 + P_1 s + P_2 s^2 + \dots + P_m s^m. \end{aligned} \quad (5.198)$$

Egalind coeficienții termenilor de același grad din cei doi membri ai relației (5.198), se obțin coeficienții Q_r și P_r . Astfel, pentru cazul particular cind $m = 1$ și $n = 3$, rezultă [59]

$$\begin{bmatrix} h_\infty & 0 & 0 & 0 \\ -M_0 & h_\infty & 0 & 0 \\ M_1 & -M_0 & h_\infty & 0 \\ -\frac{1}{2}M_2 & M_1 & -M_0 & h_\infty \\ \frac{1}{6}M_3 & -\frac{1}{2}M_2 & M_1 & -M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dezavantajul metodei constă în necesitatea alegerii apriori a valorilor m și n .

5.5.2. Metode de identificare cu compensarea erorilor

Dacă datele măsurate se exprimă printr-o funcție $H^0(i\omega)$, atunci eroarea la pulsația ω_f este

$$\varepsilon_f = \varepsilon(i\omega_f) = H^0(i\omega_f) - H(i\omega_f) = H^0(i\omega_f) - \frac{P(i\omega_f)}{Q(i\omega_f)}.$$

Înmulțind cu $Q(i\omega_f)$ se obține eroarea ponderată în punctul f

$$\varepsilon'_f = \varepsilon_f \cdot Q(i\omega_f) = Q(i\omega_f) H^0(i\omega_f) - P(i\omega_f). \quad (5.199)$$

Coeficienții polinoamelor din expresia (5.186) se pot determina rezolvînd sistemul de ecuații algebrice la care se ajunge minimizînd suma $\sum_{f=1}^{N_f} |\varepsilon'_f|^2$ pentru $f = N_f$ puncte determinate experimental [69].

Sanathanan și Koerner [107] au arătat că, dacă domeniul de frecvențe pe care se determină funcția de transfer acoperă mai multe decade, matricea care intervine în calcule este rău condiționată și, în special la frecvențe joase, aproximația este proastă.

Ei propun o metodă iterativă care elimină ponderarea de mai sus. Ecuația (5.199) se modifică, scriind

$$\varepsilon''_f = \frac{\varepsilon_f Q(i\omega_f)_L}{Q(i\omega_f)_{L-1}} = \frac{H^0(i\omega_f) Q(i\omega_f)_L - P(i\omega_f)_L}{Q(i\omega_f)_{L-1}} \quad (5.200)$$

unde indicele L corespunde treptei de iterație.

Se calculează

$$|\varepsilon''_f|^2 = \frac{|H^0(i\omega_f) Q(i\omega_f)_L - P(i\omega_f)_L|^2}{|Q(i\omega_f)_{L-1}|^2} = |\varepsilon'_f|^2 W_{fL} \quad (5.201)$$

unde

$$W_{fL} = \frac{1}{|Q(i\omega_f)_{L-1}|^2}. \quad (5.202)$$

Se formează suma

$$E = \sum_{f=1}^{N_f} |\varepsilon_f''|^2 = \sum_{f=1}^{N_f} |\varepsilon_f'|^2 W_{fL}. \quad (5.203)$$

Se derivează (5.203) în raport cu fiecare din coeficienții polinomiali și se egalează derivatele cu zero. Rezultă o ecuație matriceală de forma

$$\begin{bmatrix} V_0 & 0 & -V_2 & 0 & V_4 & \dots & T_1 & S_2 & -T_3 & -S_4 & \dots \\ 0 & V_2 & 0 & -V_4 & 0 & \dots & -S_2 & T_3 & S_4 & -T_5 & \dots \\ V_2 & 0 & -V_4 & 0 & V_6 & \dots & T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & \dots \\ 0 & V_4 & 0 & -V_6 & 0 & \dots & -S_4 & T_5 & S_6 & -T_7 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_1 & -S_2 & -T_3 & S_4 & T_5 & \dots & U_2 & 0 & -U_4 & 0 & \dots \\ S_2 & T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & \dots & 0 & U_4 & 0 & U_6 & \dots \\ T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & T_7 & \dots & U_4 & 0 & -U_6 & 0 & \dots \\ S_4 & T_5 & -S_6 & -T_7 & S_8 & \dots & 0 & U_6 & 0 & U_8 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ T_1 \\ S_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ U_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.204)$$

unde

$$\begin{aligned} V_r &= \sum_{f=1}^{N_f} \omega_f^r W_{fL}, & S_r &= \sum_{f=1}^{N_f} \omega_f^r H_R^0(\omega_f) W_{fL}, \\ T_r &= \sum_{f=1}^{N_f} \omega_f^r H_I^0(\omega_f) W_{fL}, & U_r &= \sum_{f=1}^{N_f} \omega_f^r [H_R^{02}(\omega_f) + H_I^{02}(\omega_f)] W_{fL}, \end{aligned}$$

în care

$$H_R^0(\omega_f) + iH_I^0(\omega_f) = H^0(i\omega_f)$$

iar N_f este numărul total de pulsații la care s-au efectuat măsurări.

La început se alege $W_{fL} = 1$. Se calculează V_r , T_r , S_r , U_r , și din (5.204) matricea coeficienților P_r și Q_r . Coeficienții Q_r , determinați în iterația $(L - 1)$, sînt folosiți pentru calculul lui $Q(i\omega_f)_{L-1}$, apoi din (5.202) rezultă W_{fL} pentru iterația următoare.

În cartea lui Vlach [123] se enumeră o serie de programe ce pot fi folosite pentru reprezentarea funcțiilor de răspuns în frecvență prin serii de funcții ortogonale, folosind polinoame Jacobi, Legendre, Cebîșev, Laguerre sau Hermite.

De asemenea, se poate arăta că expresiile (5.5), (3.56) și (3.186) sînt forme particulare ale relației (5.187). Pe această observație se bazează o metodă de identificare utilizată de R. Dat* pentru sisteme cu amortizare neproportională.

* DAT, R., Rech, Aérosp., 2, 99-108 (1973) și 5, 301-306 (1973).

Identificarea sistemelor liniare folosind excitație armonică în mai multe puncte

În cele ce urmează se prezintă metode de identificare în care se folosește excitație cu forțe armonice aplicate *simultan* sau *succesiv* în *puncte diferite* ale structurii studiate. Deși aplicarea succesivă a unei forțe în mai multe puncte poate fi considerată „metodă de excitație într-un singur punct”, procedeele respective sînt tratate în acest capitol deoarece de obicei reprezintă cazuri particulare ale unor metode generale, descrise în cadrul teoriei excitației simultane în mai multe puncte.

6.1. Principiul metodelor de excitație simultană în mai multe puncte

După cum s-a arătat în capitolul 5, aproape toate dificultățile ce apar la analiza curbelor de răspuns în frecvență sînt legate de faptul că răspunsul dinamic al unei structuri are loc simultan în mai multe moduri proprii de vibrație.

Eliminarea unuia sau a mai multor moduri „nedorite” se poate face prin montarea adecvată a captorilor și vibratoarelor, de exemplu, în dreptul nodurilor acestor moduri. Totuși, în multe cazuri, acest lucru nu este suficient, fiind necesară izolarea completă a unui singur mod de vibrație, deoarece aceasta facilitează determinarea parametrilor modali și a formei modului respectiv.

În principiu, studiul răspunsului în fiecare mod izolat se rezumă la analiza răspunsului unui sistem cu un grad de libertate, metodele de identificare corespunzătoare fiind cele prezentate în capitolul 2.

Interesează deci, în primul rînd, condițiile în care se poate realiza excitarea unui mod propriu de vibrație $\{\Psi^{(r)}\}$ al sistemului conservativ asociat structurii reale.

Se va considera cazul unui sistem discret, cu amortizare viscoasă liniară, a cărui ecuație de mișcare are forma (3.26)

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\} \quad (6.1)$$

sau, exprimată în funcție de coordonatele modale, forma (3.29)

$$[m_r]\{\ddot{p}\} + [c_r]\{\dot{p}\} + [k_r]\{p\} = \{F_r\}. \quad (6.2)$$

Se pune problema determinării unei excitații armonice, de pulsație ω , care face ca sistemul să vibreze în modul principal $\{\Psi^{(r)}\}$ la pulsația ω , în general diferită de ω_r , deci care produce un răspuns de forma

$$\{q\} = p\{\Psi^{(r)}\}e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (6.3)$$

unde φ indică defazajul răspunsului în urma excitației, iar p este un factor de amplitudine.

Pentru simplificarea expunerii, în continuare se va considera $p = 1$ și se va căuta excitația $\{f\} = \{\hat{f}\} e^{i(\omega t + \varphi)}$ care produce un răspuns de forma

$$\{q\} = \{\Psi^{(r)}\} e^{i\omega t}. \quad (6.3, a)$$

Conform relațiilor (3.16, a) și (6.3, a), trebuie ca

$$\{q\} = \sum_{r=1}^N \{\Psi^{(r)}\} p_r = \{\Psi^{(r)}\} e^{i\omega t},$$

deci pentru izolarea modului r este necesar ca în ecuația (6.2) să se înlocuiască

$$\{p\} = \{I\}_r e^{i\omega t}, \quad (6.4)$$

unde $\{I\}_r$ este coloana r a matricei unitate $[I]$, și în același timp

$$\{F\} = \{\hat{F}\} e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (6.5)$$

Înlocuind (6.4) și (6.5) în (6.2), simplificînd cu $e^{i\omega t}$ și separînd părțile reală și imaginară, rezultă

$$([\mathbf{k}] - \omega^2 [\mathbf{m}]) \{I\}_r = \{\hat{F}\} \cos \varphi, \quad (6.6)$$

$$\omega \{c\}_r = \{\hat{F}\} \sin \varphi, \quad (6.7)$$

unde $\{c\}_r$ este coloana r a matricei amortizării modale $[c]$.

Folosind relațiile (3.6), (3.8), (3.10), (3.20) și (3.28), se mai poate scrie

$$(\omega_r^2 - \omega^2) [\Psi]^T [M] \{\Psi^{(r)}\} = [\Psi]^T \{f'\}, \quad (6.8)$$

$$\omega [\Psi]^T [C] \{\Psi^{(r)}\} = [\Psi]^T \{f''\}, \quad (6.9)$$

unde s-au pus în evidență cele două componente vectoriale ale excitației

$$\{f\} = \{f' + if''\} e^{i\omega t}. \quad (6.10)$$

Simplificînd cu $[\Psi]^T$ se obține

$$\{f'\} = (\omega_r^2 - \omega^2) [M] \{\Psi^{(r)}\}, \quad (6.11)$$

$$\{f''\} = \omega [C] \{\Psi^{(r)}\}. \quad (6.12)$$

Rezultă că pentru a excita o structură în unul din modurile principale de vibrație ale sistemului conservativ asociat, distribuția de forțe excitatoare trebuie să aibă forma

$$\{f\} = \{f' + if''\} e^{i\omega t} = [(\omega_r^2 - \omega^2) [M] + i\omega [C]] \{\Psi^{(r)}\} e^{i\omega t}. \quad (6.13)$$

Componenta în fază cu deplasarea, $\{f'\}$, este necesară pentru echilibrarea forțelor elastice și de inerție, iar componenta defazată cu 90° înaintea deplasării, $\{f''\}$, este necesară pentru echilibrarea forțelor disipative.

Între cele două componente există relația

$$\{f''\} = \frac{\omega}{\omega_r^2 - \omega^2} [C][M]^{-1}\{f'\}, \quad (6.14)$$

deci raportul între forțele de excitație „active” $\{f''\}$ și cele „reactive” $\{f'\}$ depinde de pulsația excitatoare ω . Aceasta face ca, în general, realizarea practică a unei distribuții de forțe de forma (6.13) să fie deosebit de dificilă.

Se pune deci problema excitării modurilor pure ale sistemului conservativ asociat folosind o distribuție de forțe în fază, de forma

$$\{f\} = \{\hat{f}\} e^{i\omega t} \quad (6.15)$$

unde $\{\hat{f}\}$ este un vector cu elemente reale.

Există trei situații distincte în care se pot excita moduri reale „clasice” de vibrație :

a) La sisteme cu amortizare neglijabilă, orice mod propriu de vibrație $\{\Psi^{(r)}\}$ poate fi excitat la orice pulsație ω dacă excitația are forma (3.25), reprezentînd un mod principal de solicitare

$$\{\hat{f}\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = [K - \omega^2 M] \{\Psi^{(r)}\} = (\omega_r^2 - \omega^2) [M] \{\Psi^{(r)}\} \quad (6.16)$$

și dacă $\omega \neq \omega_r$.

b) La sisteme cu amortizare proporțională se poate excita un mod propriu $\{\Psi^{(r)}\}$ la orice pulsație ω folosind o excitație de forma*

$$\{\hat{f}\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + \left(2\zeta_r \frac{\omega}{\omega_r}\right)^2} \omega_r^2 [M] \{\Psi^{(r)}\} \quad (6.17)$$

unde

$$\zeta_r = \frac{c_r}{2m_r \omega_r}, \quad \omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r}, \quad (6.18)$$

deci forțele $\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}$ trebuie să fie proporționale cu forțele de inerție corespunzătoare deplasărilor modale.

* Pentru simplificarea notației, vectorul excitației ajustate care produce un răspuns într-un mod propriu $\{\Psi^{(r)}\}$ se va nota peste tot $\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}$.

Într-adevăr, dacă matricea $[c]$ este diagonală, atunci conform relației (6.7) toate forțele modale trebuie să fie nule, cu excepția forței F_r , căci vectorul $\{c\}_r$ conține doar elementul de pe linia r . Relațiile (6.6) și (6.7) se scriu

$$k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right) = \hat{F}_r \cos \varphi, \quad (6.19)$$

$$2\zeta_r k_r \frac{\omega}{\omega_r} = \hat{F}_r \sin \varphi, \quad (6.20)$$

deci

$$\hat{F}_r = k_r \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + \left(2\zeta_r \frac{\omega}{\omega_r}\right)^2} \quad (6.21)$$

iar

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\zeta_r \frac{\omega}{\omega_r}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}} = \operatorname{tg} \varphi_r \quad (6.22)$$

unde φ_r este defazajul caracteristic definit de relația (3.98) dacă se înlocuiește $[H] = [0]$.

Prin definiție $\{\hat{F}\} = [\Psi]^T \{f\}$, de unde rezultă

$$\{f\} = [\Psi]^{-T} \{\hat{F}\}. \quad (6.23)$$

Din ecuația (3.21) se obține

$$[\Psi]^{-T} = [M] [\Psi] [m]^{-1}$$

care înlocuită în (6.23) conduce la

$$\{f\} = [M] [\Psi] [m]^{-1} \{\hat{F}\}. \quad (6.24)$$

În cazul cînd doar $\hat{F}_r \neq 0$, expresia (6.24) devine

$$\{f\} = [M] \{\Psi^{(r)}\} \frac{1}{m_r} \hat{F}_r. \quad (6.25)$$

Înlocuind (6.21) în (6.25) se obține relația (6.17), în care radicalul este proporțional cu modulul obstructanței modale complexe.

Deci, în cazul amortizării proporționale, excitația necesară pentru a produce un răspuns de forma

$$\{q\} = \{\Psi^{(r)}\} e^{i(\omega t - \varphi_r)} \quad (6.26)$$

unde φ_r este dat de relația (6.22), este

$$\{\mathcal{F}^{(r)}\} = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + \left(2\zeta_r \frac{\omega}{\omega_r}\right)^2} \omega_r^2 [M] \{\Psi^{(r)}\} e^{i\omega t}. \quad (6.27)$$

Dacă se lucrează la pulsația de rezonanță de fază $\omega = \omega_r$, atunci $\varphi_r = 90^\circ$, iar excitația necesară pentru a produce un răspuns

$$\{q\} = \{\Psi^{(r)}\} e^{i(\omega_r t - \frac{\pi}{2})} = -i\{\Psi^{(r)}\} e^{i\omega_r t} \quad (6.28)$$

este

$$\{\mathcal{F}^{(r)}\} = 2\zeta_r \omega_r^2 [M] \{\Psi^{(r)}\} e^{i\omega_r t}. \quad (6.29)$$

Din ecuația (6.27) rezultă că rapoartele forțelor aplicate în diferite puncte ale structurii nu depind de pulsația ω , fiind egale cu rapoartele forțelor (6.29) necesare pentru a excita modurile proprii $\{\Psi^{(r)}\}$ la rezonanța de fază corespunzătoare. Dacă $[M] = [M]$, se stabilește relația

$$\frac{M_1 \Psi_1^{(r)} \omega_r^2}{\hat{\mathcal{F}}_1^{(r)}} = \dots = \frac{M_j \Psi_j^{(r)} \omega_r^2}{\hat{\mathcal{F}}_j^{(r)}} = \dots = \frac{M_N \Psi_N^{(r)} \omega_r^2}{\hat{\mathcal{F}}_N^{(r)}} \quad (6.30)$$

unde M_j este masa din punctul j .

La această concluzie se poate ajunge și direct. Condiția necesară și suficientă ca toate forțele modale să fie nule, cu excepția forței F_r , este ca vectorul $\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}$ să fie proporțional cu vectorul $[M] \{\Psi^{(r)}\}$ deoarece, în virtutea relațiilor de ortogonalitate (3.6), vectorul $[\Psi]^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}$, proporțional cu $[\Psi]^T [M] \{\Psi^{(r)}\}$, conține doar termenul de rang r .

c) *La sisteme cu amortizare neproporțională un mod propriu de vibrație $\{\Psi^{(r)}\}$ poate fi excitat cu un grup de forțe echifazice numai la pulsația de rezonanță de fază ω_r , dacă excitația are forma*

$$\{\hat{f}\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = \omega_r [C] \{\Psi^{(r)}\}. \quad (6.31)$$

Expresia (6.31) rezultă din (3.95) pentru $[H] = [0]$, deoarece la $\omega = \omega_r$, defazajul caracteristic este $\varphi_r = 90^\circ$, iar modul de distorsiune $\{\Phi^{(r)}\}$ este identic cu modul propriu $\{\Psi^{(r)}\}$.

Prin înmulțire la stînga cu $[\Psi]^T$, relația (6.31) devine

$$[\Psi]^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = \omega_r [\Psi]^T [C] \{\Psi^{(r)}\} = \omega_r \{c\}_r. \quad (6.32)$$

Prin urmare, pentru izolarea unui mod propriu, forțele modale trebuie să fie proporționale cu coloana coeficienților de amortizare modală, de același rang ca cel al modului considerat.

Pentru $\omega = \omega_r$, relațiile (6.11) și (6.12) devin

$$\{f'\} = \{0\}, \quad \{f''\} = \omega_r [C] \{\Psi^{(r)}\}, \quad (6.33)$$

pe baza cărora se demonstrează următoarea teoremă: *Condiția necesară și suficientă ca vibrația să aibă loc într-un mod propriu $\{\Psi^{(r)}\}$ este ca răspunsul să fie în cvadratură cu forțele excitatoare echifazice.*

6.2. Metoda rezonanței de fază

Metoda rezonanței de fază se bazează pe relația (6.31) și pe observațiile de la punctul c) din paragraful 6.1. Pentru structuri liniare, cu amortizare viscoasă, avînd matricea $[C]$ simetrică și definită pozitiv,

distribuția de forțe (6.33) permite izolarea unui mod propriu $\{\Psi^{(r)}\}$ la pulsația rezonanței de fază corespunzătoare ω_r .

După determinarea aproximativă a tuturor pulsațiilor de rezonanță ω_r din domeniul de pulsații de interes, operația cea mai dificilă constă în izolarea fiecărui mod, prin alegerea excitației corespunzătoare.

6.2.1. Ajustarea forțelor excitatoare

O structură reală continuă poate fi solicitată într-un număr limitat de puncte accesibile, numărul vibratoarelor ce se pot folosi simultan fiind și mai redus.

Condiția ideală, ca în toate punctele structurii sistemul de forțe echifazice (sau defazate cu 180°) să producă viteze în fază cu forțele, nu poate fi realizată decît cu o anumită aproximație. Rezonanța de fază „completă” s-ar obține atunci cînd matricea coloană a vitezelor de răspuns, în cvadratură cu forțele, ar fi nulă. În practică, această condiție este înlocuită cu cea a minimizării unui scalar, funcție de vitezele în cvadratură cu forțele, măsurate în diferite puncte ale structurii.

6.2.1.1. Metode pur experimentale

Prima metodă de ajustare experimentală a forțelor excitatoare, în vederea izolării unui mod propriu pur, a fost propusă în 1950 de Lewis și Wrisley [70]. În principiu, metoda este un procedeu iterativ pentru obținerea distribuției de forțe (6.33).

Echipamentul folosit conține 24 vibratoare electromagnetice cu comandă independentă și 24 accelerometre montate în punctele de solicitare a structurii. Vibratoarele sînt acționate în fază (sau defazate cu 180°) de la o sursă de tensiune de frecvență variabilă.

La început se face o împărțire a masei totale a structurii în mai multe mase concentrate, apreciind arbitrar masa M_j , ce poate fi considerată în punctul j . Echipamentul permite obținerea unui semnal proporțional cu raportul între forța produsă de fiecare vibrator și masa M_j , atașată în punctul respectiv. Acest semnal, împreună cu semnalul dat de accelerometrul plasat în punctul j , integrat în prealabil, sînt aplicate pe plăcile de deflecție (verticală și orizontală) ale unui osciloscop, măsurîndu-se astfel raportul amplitudinilor și defazajul celor două semnale (prin metoda elipsei).

Excitînd structura cu un singur vibrator, se baleiează frecvența excitatoare pînă la realizarea rezonanței locale de fază. Apoi se activează pe rînd și celelalte vibratoare, la aceeași frecvență, reglînd însă nivelul fiecărei forțe pînă la realizarea condiției ca rapoartele dintre forța excitatoare și masa aferentă punctului — pe de o parte și viteza — pe de altă parte, să fie aceleași în toate punctele de excitare, condiție similară cu (6.30). O descriere amănunțită a aparaturii și a modului de lucru se găsește în lucrarea [70] și în cap. 13 al cărții lui Bisplinghoff [15].

Un echipament care permite ajustarea automată a forțelor excitatoare pentru izolarea unui mod pur a fost prezentat de Hawkins [51]. Aparatura modernă, folosită pentru excitația simultană în mai multe puncte, conține circuite de servocontrol pentru menținerea condiției de rezonanță de fază (defazaj nul între forțe și viteze). Unul dintre circuitele

de reacție controlează frecvența excitatoare a tuturor vibratoarelor, celelalte controlează doar amplitudinea forțelor [63].

Aplicarea metodei este limitată la structuri cu amortizare proporțională, la care vectorul $\{\hat{f}\}$ este proporțional cu $[M]\{\Psi^{(r)}\}$.

Bishop și Gladwell [13] au propus un procedeu de testare a valabilității acestei ipoteze. Se excită un mod pur la pulsația de rezonanță de fază, utilizând metoda lui Lewis și Wrisley. Apoi, menținând constant raportul forțelor aplicate în diferite puncte, se modifică frecvența. Dacă amortizarea este proporțională și distribuția de forțe este ajustată corect, atunci vibrația continuă să aibă loc într-un mod propriu, adică punctele se mișcă în fază și deplasările sînt defazate cu 90° față de forțe.

6.2.1.2. Metode semi-experimentale

Pentru a evita aproximațiile inerente metodei iterative a lui Lewis și Wrisley, Traill-Nash [117, 118] a propus o metodă care, pe baza unor rezultate experimentale determinate pe structura încercată, permite fie calculul distribuției de forțe care produce răspuns într-un mod propriu neamortizat de vibrație, fie ajustarea sistematică a forțelor folosind o metodă de relaxare în vederea izolării modurilor pure. Procedeu este general, putînd fi aplicat la structuri cu amortizare neproporțională.

Se folosește un echipament care conține vibratoare electromagnetice și captori pentru măsurarea deplasărilor în fază cu excitația.

La început, utilizînd excitația într-un singur punct, se determină pulsațiile proprii ω_r ale modurilor de vibrație studiate, folosind (de exemplu) metoda Kennedy-Pancu [61]. Apoi, *dacă sistemul are N grade de libertate*, se aplică N distribuții de forțe în fază, liniar independente, la fiecare pulsație proprie ω_r

$$\{\hat{f}\}_1 \sin \omega_r t, \quad \{\hat{f}\}_2 \sin \omega_r t, \quad \dots, \quad \{\hat{f}\}_N \sin \omega_r t \quad (6.34)$$

și se măsoară componentele deplasărilor în fază cu forțele

$$\{q_R\}_1 \sin \omega_r t, \quad \{q_R\}_2 \sin \omega_r t, \quad \dots, \quad \{q_R\}_N \sin \omega_r t. \quad (6.35)$$

Pe baza acestor date determinate experimental, se calculează apoi o combinație liniară a distribuțiilor de forțe (6.34)

$$\{\hat{f}\} = \sum_{s=1}^N \gamma_s \{\hat{f}\}_s, \quad (6.36)$$

în care constantele reale γ_s sînt astfel alese încît răspunsul în fază respectiv să fie nul, deci

$$\{q_R\} = \sum_{s=1}^N \gamma_s \{q_R\}_s = \{0\}. \quad (6.37)$$

Conform relației (3.119), orice distribuție de forțe în fază poate fi exprimată ca o combinație liniară de moduri forțate de solicitare

$$\{f\} = \{\hat{f}\} \sin \omega t = \left(\sum_{r=1}^N \lambda_r \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} \right) \sin \omega t, \quad (6.38)$$

unde λ_r sînt constante reale, date de relația (3.121).

Răspunsul corespunzător este dat de relația (3.120)

$$\{q\} = \sum_{r=1}^N \lambda_r \{\Phi^{(r)}\} \sin(\omega t - \varphi_r). \quad (6.39)$$

Componenta răspunsului în fază cu excitația este

$$\{q_R\} \sin \omega t = \left(\sum_{r=1}^N \lambda_r \cos \varphi_r \{\Phi^{(r)}\} \right) \sin \omega t. \quad (6.40)$$

Condiția (6.37) se realizează dacă

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{r-1} = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_N = 0 \text{ și } \omega = \omega_r. \quad (6.41)$$

Dar dacă $\omega = \omega_r$, atunci $\varphi_r = 90^\circ$ și $\{\Phi^{(r)}\} \equiv \{\Psi^{(r)}\}$ iar din relația (6.39) rezultă

$$\{q\} = -\lambda_r \{\Psi^{(r)}\} \cos \omega_r t, \quad (6.42)$$

deci un mod propriu $\{\Psi^{(r)}\}$ este izolat la pulsația ω_r .

De notat că în distribuțiile (6.34) se poate folosi cîte o singură forță, aplicată de fiecare dată în alt punct, deci problema practică se reduce la măsurarea răspunsului în cazul excitației într-un singur punct. Pentru aceasta trebuie cunoscut exact numărul gradelor de libertate ale structurii studiate și găsite tot atîtea puncte de solicitare, ceea ce reprezintă un dezavantaj esențial al metodei. De asemenea, dacă pulsația excitatoare nu coincide exact cu o pulsație proprie ω_r , atunci sistemul (6.37) nu are soluție.

În lucrarea [117] Traill-Nash introduce noțiunea de „număr efectiv de grade de libertate” al unei structuri continue și indică numărul de captori și vibratoare necesar pentru o măsurare eficientă, număr care în general diferă în încercările pentru izolarea diferitelor moduri proprii.

Pentru a evita erorile legate de aprecierea greșită a numărului gradelor de libertate N , Asher [2] a propus o altă metodă, care combină măsurările cu calcule, avînd principal aceeași bază analitică.

În loc să rezolve sistemul (6.37) pentru a găsi distribuția corectă de forțe, Asher îl folosește pentru determinarea pulsațiilor proprii ale sistemului. Conform relației (3.140) acestea sînt soluții ale ecuației

$$\det [q_R] = 0, \quad (6.43)$$

unde

$$[q_R] = [\{q_R\}_1 \{q_R\}_2 \dots \{q_R\}_N] \quad (6.44)$$

este matricea componentelor reale ale răspunsurilor, produse de N distribuții de forțe avînd o matrice pătrată de forma

$$[f] = [\{f\}_1 \{f\}_2 \dots \{f\}_N]. \quad (6.45)$$

Întrucît matricele (6.44) și (6.45) satisfac o relație de forma

$$[q_R] = [\alpha_R] [f], \quad (6.46)$$

unde $[\alpha_R]$ este matricea componentelor reale ale receptanțelor, ecuația (6.43) este echivalentă cu

$$\det [\alpha_R] = 0, \quad (6.47)$$

deoarece forțele (6.45) trebuie să fie liniar independente, deci $\det[f] \neq 0$.

Metodologia propusă de Asher este următoarea: La început se folosește un singur vibrator și un captor pentru măsurarea deplasărilor. Se face un baleiaj de frecvență pornind de la pulsații foarte joase. Valoarea la care partea reală a receptanței unice își modifică semnul dă o primă evaluare a primei pulsații proprii.

Se adaugă apoi încă un vibrator și un captor, astfel că se pot măsura patru receptanțe, iar baleiajul se repetă pe domeniul de pulsații care cuprinde prima valoare măsurată. Se reprezintă grafic (fig. 6.1) variația cu pulsația a determinantului părții reale a matricei receptanțelor. Primul „zero” dă o estimare mai corectă a primei pulsații proprii, iar al doilea „zero” dă o valoare aproximativă a celei de a doua pulsații proprii.

Se adaugă un al treilea vibrator și al treilea captor, măsurând $3 \times 3 = 9$ receptanțe, corectînd primele două pulsații proprii și estimînd-o pe a treia. Procesul continuă pe tot domeniul pulsațiilor de interes, putîndu-se astfel determina sistematic numărul vibratoarelor necesare pentru excitarea unui sistem ale cărui caracteristici dinamice (deci grade de libertate de interes) nu se cunosc apriori.

După stabilirea numărului gradelor de libertate semnificative și determinarea precisă a pulsațiilor de rezonanță, se poate reveni la ecuațiile (6.36) și (6.37), pentru determinarea distribuției forțelor capabile să excite un mod pur.

O variantă a metodei lui Asher este expusă în lucrarea [13], fără a fi susținută de o aplicare experimentală, iar o generalizare—în lucrarea [1].

O metodă îmbunătățită de ajustare a forțelor excitatoare a fost propusă de Clerc [24, 25].

Metoda se bazează pe un echipament care conține vibratoare electrodinamice și captori de viteze. Ea constă în calcularea unei distribuții de forțe de forma (6.36)

$$\{\hat{f}\} = [f] \{\gamma\} \quad (6.48)$$

unde vectorul

$$\{\gamma\} = \{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_N\}^T$$

se determină din condiția de minimizare a coloanei componentelor în cvadratură ale vitezei în diferite puncte $\{\hat{q}_I\}$, considerată ca răspuns parazit.

Pentru aceasta, se definește un *scalar rezidual relativ*

$$\epsilon = \frac{\{\hat{q}_I\}^T [\omega_s] \{\hat{q}_I\}}{\{\hat{f}\}^T \{\hat{f}\}} = \frac{\sum_{s=1}^N \omega_s (\hat{q}_{I_s})^2}{\{\hat{f}\}^T \{\hat{f}\}}, \quad (6.49)$$

unde $[\omega_s]$ este o matrice de ponderare arbitrară și se determină vectorul $\{\gamma\}$ pentru care ϵ are o valoare minimă. Prezentarea în detaliu a metodei depășește cadrul acestei lucrări.

O metodă larg utilizată în prezent, cu posibilități de semiautomatizare, a fost propusă de Deck [29]. Se folosesc captori de viteze iar cu ajutorul unui calculator analogic se calculează direct cantitatea pozitivă

$$\xi = \frac{\sum_{j=1}^M |\dot{q}_{I_j}|}{\sum_{j=1}^M |\dot{q}_{R_j}|} = \frac{\sum_{j=1}^M |\hat{q}_j \sin \theta_j|}{\sum_{j=1}^M |\hat{q}_j \cos \theta_j|}, \quad (6.50)$$

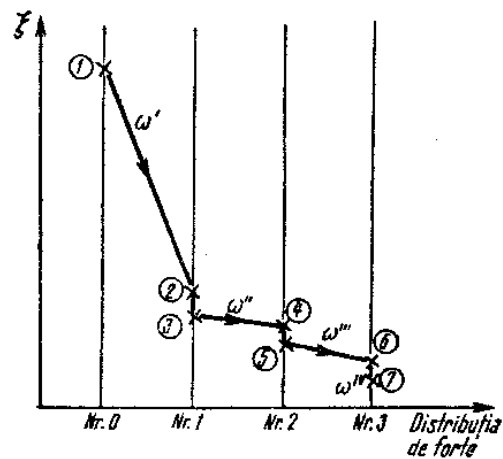
unde $|\dot{q}_{R_j}|$ și $|\dot{q}_{I_j}|$ sînt valorile absolute ale componentelor reală și imaginară ale vitezei în punctul j , iar θ_j este defazajul între forță și viteză. Sumele se efectuează pentru un număr de captori M , mai mare decît numărul de vibratoare N .

Cantitatea ξ , care poate fi considerată drept un defazaj global mediu, este funcție de pulsația ω și de amplitudinea \hat{f}_i a forțelor excitatoare, avînd o valoare minimă în cazul distribuției optime a acestora.

Evoluția lui ξ în timpul ajustării forțelor a trei vibratoare, pentru excitarea unui mod de vibrație pur, este ilustrată în figura 6.2b.

Forța \hat{f}_1	$\hat{f}_1' \rightarrow$	\hat{f}_1''	\hat{f}_1'''	\hat{f}_1^{IV}
Forța \hat{f}_2	\hat{f}_2'	$\hat{f}_2'' \rightarrow$	\hat{f}_2'''	\hat{f}_2^{IV}
Forța \hat{f}_3	\hat{f}_3'	\hat{f}_3''	$\hat{f}_3''' \rightarrow$	\hat{f}_3^{IV}

a



b

Fig. 6.2

Încercarea începe cu o distribuție arbitrară de forțe $\hat{f}_1', \hat{f}_2', \hat{f}_3'$. Se face un baleiaj de pulsație în jurul valorii ω_r (determinată aproximativ în prealabil) și se alege ω' — valoarea corespunzătoare minimului funcției $\xi(\omega)$ — punctul ① în figura 6.2b. Apoi menținînd $\omega' = \text{const.}$ se ajustează amplitudinea forței \hat{f}_1 pînă se stabilește valoarea \hat{f}_1'' la care ξ este minim (punctul ②). Variînd din nou pulsația excitatoare, se obține valoarea ω'' pentru care ξ este minim (punctul ③). Procedeeul continuă, modificînd forța \hat{f}_2 și stabilind valoarea \hat{f}_2'' (punctul ④) și o nouă pulsație ω''' (punctul ⑤) pentru care ξ este minim. Apoi se modifică \hat{f}_3 , stabilind amplitudinea \hat{f}_3'' , (punctul ⑥) și pulsația ω^{IV} (punctul ⑦). Pe măsură ce se ajustează fiecare forță \hat{f}_i și se reglează corespunzător pulsația ω , valoarea lui ξ scade, obținîndu-se excitația optimă (ultima coloană în fig. 6.2a)

Baza analitică și demonstrația convergenței metodei sînt prezentate în lucrarea [29]. O metodă similară, bazată pe minimizarea cantității pozitive

$$R = \sum_{j=1}^M |\hat{q}_j \sin \theta_j|$$

a fost propusă de Deck în lucrarea [30]. O metodă de ajustare iterativă a excitației, bazată pe metoda lui Galerkin, este prezentată în lucrarea [139].

6.2.1.3. Metoda „reinjectării”

O soluție interesantă pentru ajustarea forțelor de excitație, care de fapt adaptează o structură la o anumită excitație, a fost propusă de către de Vries [132, 133].

După cum rezultă din relația (6.30), în cazul amortizării proporționale, repartitia forțelor excitatoare care asigură izolarea unui mod nu depinde de valoarea absolută a amortizării, fiind aceeași ca și pentru structura neamortizată. Aceste forțe echilibrează forțele elastice și cele masice la orice pulsație ω , în afara rezonanței de fază $\omega = \omega_r$ unde nu este posibil un regim staționar în absența amortizării.

Fie \hat{f}_j amplitudinea forței excitatoare armonice și $|\hat{q}_j|$ valoarea absolută a vitezei de răspuns în punctul j ($j = 1, 2, \dots, N$). Se trasează (fig. 6.3) familii de curbe care dau variația raportului $\frac{|\hat{q}_j|}{|\hat{q}_1|}$ în funcție de $\frac{\hat{f}_j}{\hat{f}_1}$ pentru diferite pulsații ω . Curbele fiecărei familii definesc câte o zonă în interiorul căreia se poate localiza un punct a cărui abscisă determină o valoare aproximativă a raportului $\frac{\hat{f}_j}{\hat{f}_1}$, definind o primă distribuție a forțelor care produc răspunsul într-un mod pur.

Dacă curbele sînt concurente, modul este perfect izolat, deoarece pentru orice ω rapoartele $\left(\frac{\hat{f}_j}{\hat{f}_1}\right)_{\text{ajustat}}$ produc același răspuns :

$$\frac{|\hat{q}_j|}{|\hat{q}_1|} = \frac{\Psi_j^{(r)}}{\Psi_1^{(r)}}$$

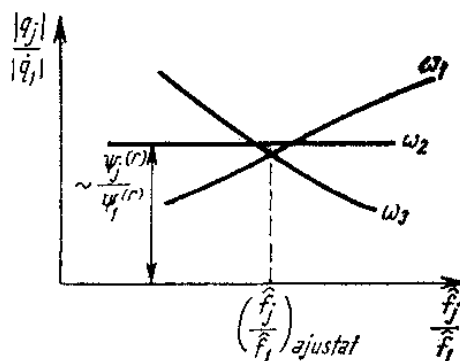


Fig. 6.3

În caz contrar, existența zonei triunghiulare în figura 6.3 este o dovadă a faptului că amortizarea este neproporțională [6].

Termenii nediagonali ai matricei $[c]$ apar datorită unei distribuții locale diferite a amortizării față de cea a maselor și a constantelor elastice.

Folosind circuite de reacție este posibilă însumarea semnalului de excitație al fiecărui vibrator cu un semnal proporțional cu viteza într-un punct al structurii, deci adăugarea la forța inițială a unei componente proporționale cu viteza, avînd natura unei forțe de amortizare viscoasă.

Forțele modale suplimentare sînt de forma

$$\{F^*\} = [c^*] \{\dot{p}\},$$

deci ecuația (6.2) devine

$$[m] \{\ddot{p}\} + [c - c^*] \{\dot{p}\} + [k] \{p\} = \{F\}.$$

Pentru a avea amortizare proporțională, matricea $[c^*]$ trebuie astfel aleasă încît matricea $[c - c^*]$ să fie diagonală. În practică, este suficient să se anuleze elementele nedigonale ale primei linii și primei coloane ale matricei $[c - c^*]$.

Adaptarea experimentală a structurii pentru a corespunde unui sistem cu amortizare proporțională se face printr-un proces iterativ.

Folosind repartiția aproximativă de forțe, calculată cu ajutorul curbelor din figura 6.2, se determină o pulsație foarte apropiată de cea de rezonanță de fază, pe baza răspunsului unui captor de referință care măsoară viteza \dot{q}_1 . Vitezele în celelalte puncte sînt defazate față de \dot{q}_1 cu unghiuri θ_{j1} . Variind amplificarea în circuitele de reacție (de reinjec-tare) ale fiecărui vibrator, se determină valoarea cîștigului pentru care $\theta_{j1} = 0$. La capătul acestei operații, vitezele în toate punctele sînt în fază cu viteza în punctul de referință 1, dar aceasta este defazată față de excitație. Se modifică pulsația excitatoare și se repetă reglajul amplificării în fiecare circuit de reacție, modificînd astfel „amortizarea” introdusă local, pînă la obținerea condiției de rezonanță de fază.

În metodele moderne de excitație în mai multe puncte, fie că se renunță la ajustarea forțelor [1], fie că aceasta nu se face așa complet ca la metoda clasică [140].

6.2.2. Determinarea parametrilor modali

6.2.2.1. Metoda energiei introduse în sistem

Această metodă, expusă în 1950 de către G. de Vries [125], se bazează pe măsurarea lucrului mecanic efectuat de forțele de excitație (ajustate) pe deplasările corespunzătoare unui mod propriu de vibrație, la rezonanța de fază.

Dacă o excitație de forma

$$\{f\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} e^{i\omega_r t} \quad (6.53)$$

produce răspunsul în cvadratură

$$\{q\} = -i\{\Psi^{(r)}\} e^{i\omega_r t}, \quad (6.54)$$

înlocuind expresiile (6.53) și (6.54) în ecuațiile de mișcare (6.1), separînd apoi partea reală și cea imaginară, rezultă

$$\begin{aligned} ([K] - \omega_r^2 [M]) \{\Psi^{(r)}\} &= \{0\}, \\ \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} &= \omega_r [C] \{\Psi^{(r)}\}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

În cazul amortizării proporționale, folosind notațiile (6.18), relația (6.55) devine

$$\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = 2\zeta_r \omega_r^2 [M] \{\Psi^{(r)}\}. \quad (6.56)$$

Înmulțind la stînga cu $\{\Psi^{(r)}\}^T$ și ținînd cont de notația (3.8), se obține

$$m_r = \frac{\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}}{2\zeta_r \omega_r^2}. \quad (6.57)$$

Deci masa modală m_r se poate calcula cunoscînd energia introdusă în sistem

$$\{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(r)} \hat{\mathcal{F}}_j^{(r)}$$

și valoarea raportului de amortizare ζ_r , determinat cu altă metodă (de ex. în vibrații libere).

Dezavantajul principal al metodei constă în dependența masei modale m_r de ζ_r . La structuri reale, ζ_r poate varia în timp, iar mici erori relative în calculul lui ζ_r duc la erori absolute mari în calculul lui m_r [7].

În cazul amortizării neproporționale, dacă se introduce matricea pătrată

$$[\hat{\mathcal{F}}] = [\{\hat{\mathcal{F}}^{(1)}\} \{\hat{\mathcal{F}}^{(2)}\} \dots \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} \dots \{\hat{\mathcal{F}}^{(N)}\}],$$

din ecuația (6.32) se obține

$$[c] = [\Psi]^T [\hat{\mathcal{F}}] \begin{bmatrix} \overline{\quad} \\ \frac{1}{\omega_r} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}, \quad (6.58)$$

de unde se calculează coeficienții de amortizare modali.

6.2.2.2. Metoda maselor adiționale

Metoda maselor adiționale a fost propusă în 1952 de către G. de Vries [126] ca un procedeu experimental pentru determinarea maselor modale. Ea este de fapt o generalizare a metodei descrise în § 2.6.1.1. pentru determinarea masei necunoscute a unui sistem cu un grad de libertate.

După ce se realizează excitarea unui mod pur $\{\Psi^{(r)}\}$ la pulsația ω_r , cu un sistem de forțe ajustate $\{\mathcal{F}^{(r)}\}$, în diferite puncte ale structurii (de obicei chiar în dreptul punctelor de excitație) se adaugă mase cunoscute ΔM_j . Prin aceasta, condiția de rezonanță nu mai este îndeplinită. Pentru restabilirea rezonanței de fază, se modifică pulsația (cu $\Delta\omega_r$) și amplitudinea (eventual poziția) forțelor excitatoare. Cunoscînd $\{\Psi^{(r)}\}$ și măsurînd $\Delta\omega_r$ se poate calcula m_r .

În varianta cea mai utilizată a metodei, masele adiționale ΔM_j se alege astfel încît forma modului $\{\Psi^{(r)}\}$ să rămînă practic neschimbată [73].

Atașarea maselor ΔM_j este echivalentă cu aplicarea unor forțe de inerție proporționale cu $\Psi_j^{(r)} \Delta M_j$. Acestea se adaugă sistemului inițial de forțe ajustate, care în cazul amortizării proporționale trebuie să fie proporționale cu produsele $\Psi_j^{(r)} M_j$.

Pentru a nu excita alte forme proprii $\{\Psi^{(s)}\}$, trebuie ca lucrul mecanic efectuat pe un ciclu de vibrație de forțele rezultante să fie nul

$$\sum_{s=1}^N \Psi_j^{(s)} \Psi_j^{(r)} (M_j + \Delta M_j) = 0 \quad (s \neq r)$$

condiție similară relațiilor de ortogonalitate (3.6) în cazul unei matrice $[M]$ diagonale. Deci, pentru ca forma modului propriu să se conserve, trebuie ca matricea maselor modale să rămână diagonală.

Condiția se realizează dacă masele adiționale ΔM_j se aleg proporționale cu masele M_j . Această alegere nu se poate face direct, deoarece nu se cunoaște nici distribuția și nici valoarea acestora.

Aceeași problemă a apărut și la excitarea modurilor proprii de vibrație, unde, teoretic, trebuia cunoscută repartiția maselor pentru a aplica în fiecare punct j forțe proporționale cu $\Psi_j^{(r)} M_j$. Practic s-a dovedit însă că ajustarea forțelor se poate face prin tatonări, urmărind realizarea criteriilor de fază.

Existind o analogie directă între cele două probleme, se poate trage următoarea concluzie :

Dacă pentru un număr dat de puncte de excitație s-a determinat repartiția optimă de forțe (care dă un defazaj minim între diferitele puncte ale structurii), cea mai bună repartiție a maselor adiționale, în număr egal cu forțele, este cea în care masele sînt proporționale cu forțele de excitație și plasate în aceleași puncte [126]

$$\frac{\Delta M_1 \Psi_1^{(r)}}{\hat{\mathcal{F}}_1^{(r)}} = \frac{\Delta M_2 \Psi_2^{(r)}}{\hat{\mathcal{F}}_2^{(r)}} = \dots = \frac{\Delta M_N \Psi_N^{(r)}}{\hat{\mathcal{F}}_N^{(r)}} \quad (6.59)$$

De notat că o excitație imperfectă produce o suprapunere de moduri defazate între ele, în timp ce prezența termenilor nediagonali în matricea maselor modale produce o deformare a formei proprii prin suprapunere de moduri în fază.

Prin adăugarea maselor adiționale, sistemul (6.1) devine

$$[M + \Delta M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{f\}. \quad (6.60)$$

Dacă se impune ca forma modului de vibrație să rămână neschimbată

$$\{q\} = -i \{\Psi^{(r)}\} e^{i\omega_r^* t}, \quad (6.61)$$

unde ω_r^* este noua pulsație de rezonanță, sub acțiunea sistemului de forțe reajustate

$$\{f\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)*}\} e^{i\omega_r^* t}, \quad (6.62)$$

înlocuind expresiile (6.61) și (6.62) în (6.60) rezultă

$$[\omega_r^* [C] - i([K] - \omega_r^{*2} [M + \Delta M])] \{\Psi^{(r)}\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)*}\} \quad (6.63)$$

sau

$$(\omega_r^*[C] - i[K - \omega_r^{*2}M]) \{\Psi^{(r)}\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)*}\} - i\omega_r^{*2}[\Delta M] \{\Psi^{(r)}\}. \quad (6.63, a)$$

Egalind părțile reale și cele imaginare se obține

$$\omega_r^*[C] \{\Psi^{(r)}\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)*}\}, \quad (6.64)$$

$$([K] - \omega_r^{*2}[M]) \{\Psi^{(r)}\} = \omega_r^{*2} [\Delta M] \{\Psi^{(r)}\}. \quad (6.65)$$

Membrul drept al ecuației (6.65) reprezintă forțele de inerție corespunzătoare maselor atașate, fiind componente ale excitației în cvadratură cu forțele $\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)*}\}$. Deoarece în cazul amortizării proporționale, pe baza relațiilor (6.18), expresia (6.64) devine

$$2\zeta_r\omega_r\omega_r^*[M] \{\Psi^{(r)}\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)*}\}, \quad (6.66)$$

rezultanta celor două componente defazate cu 90° este proporțională cu $[M] \{\Psi^{(r)}\}$, ceea ce asigură conservarea formei proprii $\{\Psi^{(r)}\}$.

Înmulțind în relația (6.65) la stînga cu $\{\Psi^{(r)}\}^T$ și folosind notațiile (3.8) și (3.9) se obține

$$k_r - \omega_r^{*2}m_r = \omega_r^{*2}\{\Psi^{(r)}\}^T[\Delta M] \{\Psi^{(r)}\}. \quad (6.67)$$

Dacă se notează

$$\{\Psi^{(r)}\}^T[\Delta M] \{\Psi^{(r)}\} = \Delta m_r, \quad (6.68)$$

atunci relația (6.67) devine

$$k_r - \omega_r^{*2}m_r = \omega_r^{*2}\Delta m_r. \quad (6.69)$$

Considerînd $k_r = \text{constant}$, ceea ce implică $\{\Psi^{(r)}\}^T[K] \{\Psi^{(r)}\} = \text{const.}$, deci $\{\Psi^{(r)}\} = \text{constant}$, pe baza relației (3.10) rezultă

$$m_r = \frac{\Delta m_r}{\left(\frac{\omega_r}{\omega_r^*}\right)^2 - 1}. \quad (6.70)$$

Dacă matricea $[M]$ este diagonală, atunci

$$\Delta m_r = \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(r)2} \Delta M_j, \quad (6.71)$$

deci masele modale se calculează cu relații de forma

$$m_r = \frac{\sum_{j=1}^N \Psi_j^{(r)2} \Delta M_j}{\left(\frac{\omega_r}{\omega_r^*}\right)^2 - 1}. \quad (6.72)$$

Folosind notația

$$\omega_r^* = \omega_r + \Delta\omega_r, \quad (6.73)$$

pentru variații mici $\Delta\omega_r$ ale pulsației de rezonanță, relația (6.70) devine

$$m_r \cong -\frac{\Delta m_r}{\Delta\omega_r} \frac{\omega_r}{2} = -\frac{\omega_r}{2\Delta\omega_r} \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(r)2} \Delta M_j. \quad (6.74)$$

Masa modală (masa generalizată) a modului propriu r

$$m_r = \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(r)2} M_j \quad (6.75)$$

depinde însă de factorul arbitrar care apare în expresia lui $\Psi_j^{(r)}$ și care este fixat abia după încercare, la prelucrarea datelor.

Din acest motiv, adesea se utilizează conceptul de *masă echivalentă* care nu depinde de factorul de normalizare a vectorului modal și poate fi determinată în decursul încercării [103].

Masa echivalentă în punctul l al structurii, pentru modul r , este aceea masă concentrată care deplasată cu viteza punctului l are aceeași energie cinetică ca și întreaga structură când răspunde în modul considerat

$$M_{ech_l} = \frac{1}{\Psi_l^{(r)2}} \sum_{j=1}^N M_j \Psi_j^{(r)2}. \quad (6.76)$$

Rezultă următoarea relație între masa modală și masele echivalente în diverse puncte

$$m_r = M_{ech_1} \Psi_1^{(r)2} = M_{ech_2} \Psi_2^{(r)2} = \dots = M_{ech_l} \Psi_l^{(r)2}. \quad (6.77)$$

După atașarea maselor adiționale ΔM_j , masa echivalentă variază cu

$$\Delta M_{ech_l} = \frac{1}{\Psi_l^{(r)2}} \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(r)2} \Delta M_j. \quad (6.78)$$

Conform relațiilor (6.72), (6.75) și (6.78)

$$M_{ech_l} = \frac{\Delta M_{ech_l}}{\left(\frac{\omega_r}{\omega_r^*}\right)^2 - 1}. \quad (6.79)$$

Dacă se calculează ΔM_{ech_l} pentru mai multe valori ΔM_j și se reprezintă grafic în funcție de $\left(\frac{\omega_r}{\omega_r^*} - 1\right)$, se obține o linie dreaptă (fig. 6.4) care trece prin origine. Din panta acestei drepte rezultă M_{ech_l} , iar din relația (6.77) se calculează apoi m_r .

În practică se observă că pe măsura creșterii valorilor maselor ΔM , relația (6.79) nu mai este liniară, astfel că se recomandă limitare a acestora la valori maxime $\Delta M_j = 2\zeta_r M_j$ [126].

Aplicarea metodei fiind destul de greoaie, necesitînd multe operații și în general o reajustare a forțelor excitatoare după atașarea maselor (la structuri cu amortizare neproportională) [40], a fost înlocuită cu o metodă care permite introducerea unor constante elastice adiționale realizate pe cale electrică [130].

În lucrările lui Gauzy [44] și Kappus [134] se prezintă variante ale metodei maselor adiționale, în care forma modului propriu nu se conservă după atașarea maselor la structură.

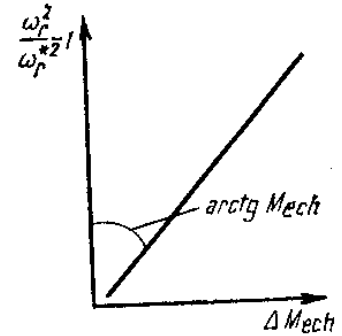


Fig.6.4

6.2.2.3. Metoda forțelor în cvadratură

Metoda forțelor în cvadratură, propusă în 1963 de către G. de Vries [131], se bazează pe folosirea unor forțe reactive, în cvadratură cu forțele principale de excitație, care la rezonanță au o acțiune similară cu cea a forțelor de inerție datorate maselor adiționale utilizate în metoda precedentă.

Dacă în ecuația (6.1) se pune condiția ca o excitație de forma

$$\{f\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} (1 + i\lambda) e^{i\omega_r^* t}, \quad (6.80)$$

să producă un răspuns

$$\{q\} = -i \{\Psi^{(r)}\} e^{i\omega_r^* t}, \quad (6.81)$$

se obține

$$(\omega_r^* [C] - i [K - \omega_r^{*2} M]) \{\Psi^{(r)}\} = (1 + i\lambda) \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}. \quad (6.82)$$

Egalînd părțile reale și cele imaginare din cei doi membri, rezultă

$$\omega_r^* [C] \{\Psi^{(r)}\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}, \quad (6.83)$$

$$[K - \omega_r^{*2} M] \{\Psi^{(r)}\} = -\lambda \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}. \quad (6.84)$$

Înmulțind în relația (6.84) la stînga cu $\{\Psi^{(r)}\}^T$, se obține, pe baza notațiilor (3.8) și (3.9)

$$k_r - \omega_r^{*2} m_r = -\lambda \{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} \quad (6.85)$$

sau, ținînd cont de (3.10),

$$m_r(\omega_r^2 - \omega_r^{*2}) = -\lambda \{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}, \quad (6.86)$$

de unde rezultă o primă formulă pentru calculul maselor modale

$$m_r = \frac{\lambda \{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}}{\omega_r^{*2} - \omega_r^2}. \quad (6.87)$$

În cazul amortizării proporționale, după înmulțire la stînga cu $\{\Psi^{(r)}\}^T$, relația (6.83) se scrie

$$\omega_r^* c_r = \{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} \quad (6.88)$$

sau

$$2\zeta_r \omega_r \omega_r^* m_r = \{\Psi^{(r)}\}^T \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}. \quad (6.89)$$

Împărțind membru cu membru relațiile (6.86) și (6.89), rezultă

$$\frac{\omega_r^{*2} - \omega_r^2}{2\zeta_r \omega_r \omega_r^*} = \lambda \quad (6.90)$$

de unde se poate calcula raportul de amortizare modal

$$\zeta_r = \frac{1}{2\lambda} \frac{\omega_r^{*2} - \omega_r^2}{\omega_r^* \omega_r}. \quad (6.91)$$

Relația (6.90) se mai scrie

$$\lambda = \frac{1}{2\zeta_r} \frac{\left(\frac{\omega_r^*}{\omega_r}\right)^2 - 1}{\frac{\omega_r^*}{\omega_r}} = \frac{1}{2\zeta_r} \left(\frac{\omega_r^*}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega_r^*}\right). \quad (6.92)$$

Se calculează derivata

$$\frac{d\lambda}{d\left(\frac{\omega_r^*}{\omega_r}\right)} = \frac{1}{2\zeta_r} \left(1 + \frac{\omega_r^{*2}}{\omega_r^2}\right). \quad (6.93)$$

Valoarea derivatei (6.93) pentru $\omega_r = \omega_r^*$ este

$$\left[\frac{d\lambda}{d\left(\frac{\omega_r^*}{\omega_r}\right)} \right]_{\frac{\omega_r^*}{\omega_r} = 1} = \frac{1}{\zeta_r}. \quad (6.94)$$

În vecinătatea pulsației $\omega_r^* = \omega_r$, dependența „ $\omega_r^* - \lambda$ ” are forma

$$\frac{\Delta\lambda}{\frac{\Delta\omega_r^*}{\omega_r}} \cong \frac{1}{\zeta_r}. \quad (6.95)$$

Rezultă [45]

$$\zeta_r \cong \frac{\Delta \omega_r^*}{\omega_r \cdot \Delta \lambda} = - \frac{\Delta T_r^*}{T_r \cdot \Delta \lambda}, \quad (6.96)$$

unde s-a notat

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_r}, \quad T_r^* = \frac{2\pi}{\omega_r^*}.$$

Reprezentînd grafic variația perioadei T_r^* cu λ (fig. 6.5) se obține o „microcurbă de rezonanță”, care intersectează axa T_r^* în punctul de ordonată T_r . Tangenta la curbă în acest punct face cu orizontala un unghi θ , pe baza căruia ζ_r se calculează cu relația

$$\zeta_r = \frac{\operatorname{tg} \theta}{T_r}. \quad (6.97)$$

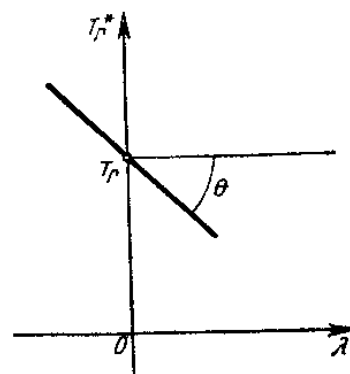


Fig. 6.5

Din relația (6.89) se poate calcula apoi m_r , iar din relația (3.10) constanta k_r .

Comparînd relațiile (6.92) și (6.22), rezultă că

$$\lambda = - \operatorname{cotg} \varphi_r, \quad (6.98)$$

deci variația parametrului λ cu pulsația este similară cu variația defazajului în jurul rezonanței.

Relația (6.83) se mai scrie

$$\omega_r^* \{\Psi^{(r)}\} = [C]^{-1} \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}. \quad (6.99)$$

Deci dacă $\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = \text{const.}$, viteza $\{\dot{q}\} = \omega_r^* \{\Psi^{(r)}\}$ în toate punctele structurii rămîne constantă pentru orice valoare λ , deci pentru orice ω_r^* .

Reciproc, dacă se menține condiția de rezonanță de fază în timpul aplicării forțelor în cvadratură, printr-o modificare corespunzătoare a pulsației excitatoare, invarianța vitezei constituie un criteriu de apreciere a perfecțiunii izolării modului.

6.2.2.4. Metoda diagramelor polare

Impedanța modală complexă a unui mod izolat are expresia

$$\bar{Z}_r = c_r - i \left(\frac{k_r}{\omega} - m_r \omega \right) = m_r \omega_r \left[2\zeta_r - i \left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r} \right) \right] \quad (6.100)$$

iar mobilitatea modală complexă

$$\bar{\mathcal{M}}_r = \bar{Z}_r^{-1} = \frac{1}{m_r \omega_r} \frac{2\zeta_r + i \left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r} \right)}{4\zeta_r^2 + \left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r} \right)^2}. \quad (6.101)$$

În figura 6.6 s-au reprezentat în planul complex diagramele funcțiilor \bar{M}_r și \bar{Z}_r^* , unde \bar{Z}_r^* este conjugata complexă a funcției \bar{Z}_r .
 Diagrama funcției \bar{Z}_r^* este o linie dreaptă, de ecuație

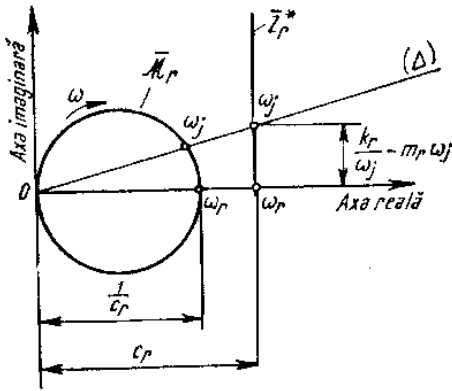


Fig. 6.6

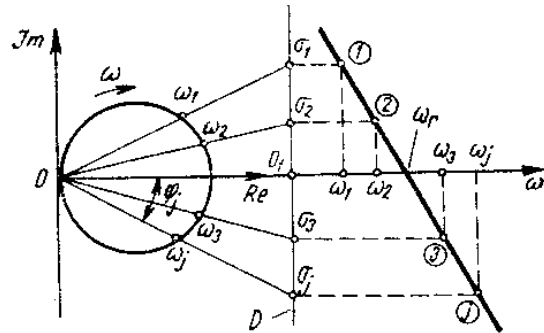


Fig. 6.7

$$\Re(\bar{Z}_r^*) = c_r 2\zeta_r m_r \omega_r$$

care intersectează axa reală în punctul de pulsație ω_r .

Punctul de pulsație ω_j are ordonata $\left(\frac{k_r}{\omega_j} - m_r \omega_j\right)$. Dreapta (Δ), care unește originea cu acest punct, are o pantă

$$\operatorname{tg} \varphi_j = \frac{\frac{k_r}{\omega_j} - m_r \omega_j}{c_r} = \frac{\omega_r - \omega_j}{2\zeta_r \omega_r} \quad (6.102)$$

Diagrama funcției \bar{M}_r este un cerc, tangent în origine la axa imaginară. Cercul intersectează axa reală în punctul de pulsație ω_r și dreapta (Δ) în punctul de pulsație ω_j .

Dacă se cunosc pulsațiile ω_j ale mai multor puncte de pe cerc, pulsația ω_r se determină utilizând construcția grafică din figura 6.7 [7]. Se duce o dreaptă (D) oarecare, paralelă cu axa imaginară. De la intersecția ei O_1 cu axa reală, în prelungirea acesteia, se trasează o axă a pulsațiilor, pe care se marchează punctele de abscise ω_j .

Se duc drepte care trec prin origine și prin punctele marcate pe cerc, pînă intersectează dreapta (D), în punctele de ordonate σ_j . Se construiesc punctele ①, de coordonate (ω_j, σ_j) și se trasează o dreaptă prin aceste puncte, care intersectează axa ω în punctul de abscisă ω_r .

Măsurînd apoi un unghi φ_j , din relația (6.102) se calculează raportul de amortizare ζ_r . Diametrul cercului este $\frac{1}{c_r}$, deci se poate calcula masa modală

$$m_r = \frac{c_r}{2\zeta_r \omega_r}$$

Metoda dă rezultate bune doar pentru structuri liniare. Neliniaritățile modifică distribuția parametrului ω în lungul diagramelor, conducînd la evaluări eronate ale parametrilor modali [128].

6.2.2.5. Metoda puterii complexe transmise structurii

Metoda puterii complexe a fost elaborată în 1969 de Bonneau [17] pentru determinarea parametrilor modali la structuri liniare cu amortizare viscoasă neproporțională, descrisă de o matrice simetrică.

Puterea complexă transmisă unei structuri are expresia

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \{\hat{f}\}^T \{\tilde{q}\} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \hat{f}_j \tilde{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \hat{f}_j (\dot{q}_{jR} + i \dot{q}_{jI}). \quad (6.103)$$

În regim armonic, pe baza transformării (3.16), rezultă

$$\{\tilde{q}\} = [\Psi] \{\tilde{p}\} = i\omega [\Psi] \{\tilde{p}\}, \quad (6.104)$$

deci

$$\mathcal{P} = i \frac{\omega}{2} \{\hat{f}\}^T [\Psi] \{\tilde{p}\}. \quad (6.105)$$

Ecuatia (6.2) se poate scrie sub forma

$$i[\omega[c] + i[m]] (\omega^2[I] - [\omega_r^2]) \{\tilde{p}\} = [\Psi]^T \{\hat{f}\} \quad (6.106)$$

sau

$$i[G] \{\tilde{p}\} = [\Psi]^T \{\hat{f}\} \quad (6.107)$$

unde s-a notat

$$[G] = \omega[c] + i[m] (\omega^2[I] - [\omega_r^2]). \quad (6.108)$$

Pentru a izola modul propriu neamortizat r la pulsația ω_r , folosind forțe reale în fază $\{\hat{f}\}$, trebuie satisfăcută relația (6.32).

Înlocuind vectorul forțelor modale ajustate (6.32) în relația (6.107), rezultă

$$i\{\tilde{p}\} = [G]^{-1} [\Psi]^T \{\hat{f}\} = [G]^{-1} \{c\}_r \omega_r, \quad (6.109)$$

unde $\{c\}_r$ este coloana r a matricei nediagonale a amortizării modale $[c]$.

Datorită simetriei matricei $[c]$, din relația (6.32) rezultă

$$\{\hat{f}\}^T [\Psi] = [[\Psi]^T \{\hat{f}\}]^T = \omega_r \{c\}_r^T = \omega_r \{c\}^r, \quad (6.110)$$

unde $\{c\}^r$ este linia r a matricei $[c]$.

Înlocuind expresiile (6.109) și (6.110) în (6.105), se obține

$$\mathcal{P} = \frac{\omega \omega_r^2}{2} \{c\}^r [G]^{-1} \{c\}_r. \quad (6.111)$$

Deoarece interesează evaluarea puterii complexe

$$\mathcal{P}(i\omega) = \mathcal{P}_R(\omega) + i\mathcal{P}_I(\omega) \quad (6.112)$$

atunci cînd se face un baleiaj de pulsație în jurul valorii ω_r , pentru calculul matricei $[G]^{-1}$ se face o dezvoltare în serie în jurul pulsației $\omega = \omega_r$.

Se notează

$$[G(\omega)] = [G(\omega_r)] + [\Delta G(\varepsilon)] \quad (6.113)$$

unde

$$\varepsilon = \omega - \omega_r \quad (6.114)$$

și

$$[G(\omega_r)]^{-1} = [J]. \quad (6.115)$$

Rezultă

$$[G(\omega_r)] = \omega_r [c] + i[m_r](\omega_r^2 [I] - [\omega_r^2]), \quad (6.116)$$

$$[\Delta G(\varepsilon)] = \varepsilon [c] + i[m_r](2\omega_r \varepsilon + \varepsilon^2), \quad (6.117)$$

deci dezvoltarea în serie va avea forma [17]

$$[G]^{-1} = [J] - [J][\Delta G][J] + [J][\Delta G][J][\Delta G][J] - \dots \quad (6.118)$$

Înlocuind (6.118) în (6.111), ținînd cont de următoarele egalități ce decurg din notațiile (6.112) – (6.117) :

$$[J]\{c\}_r = \{I\}_r,$$

$$\omega_r \{c\}_r^T [J] = \{I\}_r^T,$$

$$\{I\}_r^T \{I\}_r = 1,$$

$$[\Delta G]\{I\}_r = \{\Delta G\}_r = \varepsilon \{c\}_r + i\{I\}_r m_r (2\omega_r \varepsilon + \varepsilon^2),$$

$$\{I\}_r^T [\Delta G] = \{\Delta G\}_r^T = \varepsilon \{c\}_r^T + i m_r (2\omega_r \varepsilon + \varepsilon^2) \{I\}_r^T,$$

$$\{I\}_r^T [\Delta G] \{I\}_r = \Delta G_{rr} = \varepsilon c_{rr} + i m_r (2\omega_r \varepsilon + \varepsilon^2)$$

și introducînd notația

$$\zeta_{rr} = \frac{c_{rr}}{2m_r \omega_r}$$

se obține următoarea expresie pentru dezvoltarea în serie Taylor a puterii complexe [17] :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(i\omega) = & k_r [\zeta_{rr} \omega_r - i(\omega - \omega_r) - \frac{(\omega - \omega_r)^2}{2!} \left(4m_r \omega_r J_{rr} - \frac{i}{\omega_r} \right) + \\ & + \frac{(\omega - \omega_r)^3}{3!} (\dots) + \dots] \end{aligned} \quad (6.119)$$

unde $J_{rr} = \{I\}_r^T [J] \{I\}_r$ este o cantitate complexă.

Din relațiile (6.112) și (6.119) se obține

$$\mathcal{P}_R(\omega_r) = \zeta_{rr} \omega_r k_r, \quad (6.120)$$

$$\mathcal{P}_I(\omega_r) = 0,$$

$$\left(\frac{d\mathcal{P}_R}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_r} = 0,$$

$$\left(\frac{d\mathcal{P}_I}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_r} = -k_r, \quad (6.121)$$

$$\left(\frac{d^2\mathcal{P}_R}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_r} = -4m_r^2 \omega_r^3 \Re_e(J_{rr}), \quad (6.122)$$

$$\left(\frac{d^2\mathcal{P}_I}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_r} = m_r \omega_r - 4m_r^2 \omega_r^3 \Im_m(J_{rr}). \quad (6.123)$$

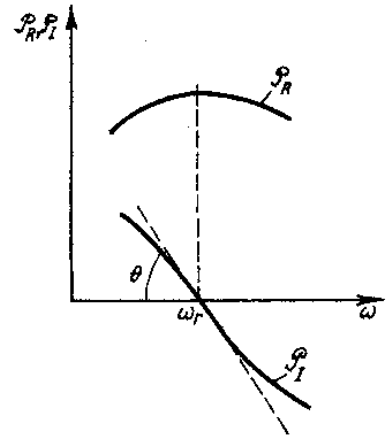
Experimental, se trasează curbele $\mathcal{P}_R(\omega)$ și $\mathcal{P}_I(\omega)$ în vecinătatea rezonanței de fază (fig. 6.8) menținând constante forțele excitatoare ajustate.

Parametrii modali se calculează cu următoarele relații

$$k_r = - \left(\frac{d\mathcal{P}_I}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_r} = \operatorname{tg} \theta, \quad (6.124)$$

$$m_r = \frac{k_r}{\omega_r^2}, \quad (6.125)$$

$$\zeta_{rr} = \frac{\mathcal{P}_R(\omega_r)}{\omega_r k_r}, \quad (6.126)$$



deci elementele diagonale ale matricei amortizării modale se calculează din relația

$$c_{rr} = \frac{2}{\omega_r^2} \mathcal{P}_R(\omega_r). \quad (6.127)$$

Fig. 6.8

Natura extremumului funcției $\mathcal{P}_R(\omega)$ depinde teoretic de semnul cantității $\Re_e(J_{rr})$. Practic, acesta corespunde unui maxim al vitezelor locale, fiind deci un maxim al puterii active \mathcal{P}_R .

Metoda are o serie de avantaje care fac să fie preferată celor descrise anterior [7]. Valorile m_r și ζ_{rr} se obțin din relații diferite. Coincidența absciselor punctului de maxim al funcției $\mathcal{P}_R(\omega)$ și zero-ului funcției $\mathcal{P}_I(\omega)$ reprezintă un criteriu de apreciere a purității modului analizat. Metoda se aplică cu bune rezultate la sisteme neliniare și atunci când izolarea modului nu este perfectă.

Alte metode de identificare a structurilor cu amortizare neproportională sînt prezentate în lucrările lui Wittmeyer [139] și [140].

6.3. Metode de excitație consecutivă în mai multe puncte

Se prezintă cîteva metode de identificare care folosesc excitația în mai multe puncte, fiind însă considerate de obicei drept „metode de excitație într-un punct”, deoarece se folosește un singur vibrator care este mutat succesiv în diferite puncte ale structurii. Aceste metode se bazează pe date măsurate experimental, care sînt prelucrate ulterior prin calcule al căror volum impune folosirea calculatoarelor numerice. Utilizarea lor practică a fost limitată însă la modele simple, datorită necesității inversării unor matrice cu elemente determinate experimental și în general rău condiționate numeric.

6.3.1. Metoda forțelor independente

În 1961 Traill-Nash [118] a propus o metodă analitico-experimentală de determinare a proprietăților dinamice ale unui sistem liniar cu amortizare neproportională. Pentru prezentarea ei este utilă o reformulare a relațiilor prezentate în § 3.2.3., introducînd matricea receptanțelor complexe (matricea coeficienților de influență dinamici) $[\bar{\alpha}]$.

În regim armonic, relația între excitație și răspuns (3.38) se poate pune sub forma

$$\{\bar{q}\} = [\bar{\alpha}]\{\hat{f}\} = [\alpha_R + i\alpha_I]\{\hat{f}\}. \quad (6.128)$$

Fie $\{\hat{f}\} = \{\hat{\mathcal{F}}\}$ distribuția de forțe care determină un răspuns în care deplasările sînt echifazice

$$\{\bar{q}\} = \{\hat{q}\} e^{-i\varphi}, \quad (6.129)$$

unde φ este defazajul între excitație și răspuns.

Înlocuind expresia (6.129) în (6.128), separînd apoi partea reală și cea imaginară, se obține

$$\{\hat{q}\} \cos \varphi = [\alpha_R]\{\hat{\mathcal{F}}\}, \quad (6.130)$$

$$- \{\hat{q}\} \sin \varphi = [\alpha_I]\{\hat{\mathcal{F}}\}. \quad (6.131)$$

Înmulțind relația (6.130) cu $\sin \varphi$, relația (6.131) cu $\cos \varphi$ și adunînd, rezultă

$$\sin \varphi [\alpha_R]\{\hat{\mathcal{F}}\} + \cos \varphi [\alpha_I]\{\hat{\mathcal{F}}\} = \{0\}, \quad (6.132)$$

sau

$$([\alpha_R] \operatorname{tg} \varphi + [\alpha_I])\{\hat{\mathcal{F}}\} = \{0\}. \quad (6.133)$$

Înmulțind relația (6.130) cu $\cos \varphi$, relația (6.131) cu $(-\sin \varphi)$ și adunând, rezultă

$$\{\hat{q}\} = ([\alpha_R] \cos \varphi - [\alpha_I] \sin \varphi) \{\hat{\mathcal{F}}\}. \quad (6.134)$$

Cînd $\omega = \omega_r$, atunci $\cos \varphi_r = 0$, iar ecuațiile (6.132) și (6.134) iau forma

$$[\alpha_R] \{\hat{\mathcal{F}}\} = \{0\}, \quad (6.135)$$

$$- [\alpha_I] \{\hat{\mathcal{F}}\} = \{\hat{q}\}. \quad (6.136)$$

Deci pulsațiile proprii ω_r se pot determina din relația (6.135) ca pulsațiile excitatoare la care determinantul părții reale a matricei receptanțelor complexe se anulează $\det [\alpha_R] = 0$, ceea ce corespunde metodei lui Asher [2].

Metoda lui Traill-Nash se bazează pe determinarea experimentală a elementelor matricei receptanțelor complexe $[\bar{\alpha}]$. Folosind un singur vibrator, montat succesiv în N puncte ale structurii, se măsoară de fiecare dată răspunsul în cele N puncte. Fie \hat{f}_i forța care aplicată în punctul i produce răspunsul $\{q_R(\omega)\}_i + i\{q_I(\omega)\}_i$.

Se formează matricele pătrate

$$[q_R(\omega)] = [\{q_R(\omega)\}_1 \{q_R(\omega)\}_2 \dots \{q_R(\omega)\}_i \dots \{q_R(\omega)\}_N], \quad (6.137)$$

$$[q_I(\omega)] = [\{q_I(\omega)\}_1 \{q_I(\omega)\}_2 \dots \{q_I(\omega)\}_i \dots \{q_I(\omega)\}_N] \quad (6.138)$$

și

$$[\hat{f}] = \text{diag} [\hat{f}_i]. \quad (6.139)$$

Se poate stabili relația

$$[q_R(\omega)] + i[q_I(\omega)] = [\alpha_R + i\alpha_I] [\hat{f}], \quad (6.140)$$

deci se cunosc elementele matricelor

$$[\alpha_R(\omega)] = [q_R(\omega) [\hat{f}]^{-1}] = [q_R(\omega)] \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hat{f} \end{bmatrix}, \quad (6.141)$$

$$[\alpha_I(\omega)] = [q_I(\omega) [\hat{f}]^{-1}] = [q_I(\omega)] \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hat{f} \end{bmatrix} \quad (6.142)$$

la pulsația excitatoare ω , determinate experimental.

Ecuația (6.133) reprezintă o problemă de rădăcini latente ale unui fascicol de matrice în care rădăcinile latente sînt $\text{tg } \varphi$. Prin rezolvarea ecuației algebrice

$$\det [\text{tg } \varphi [\alpha_R] + [\alpha_I]] = 0 \quad (6.143)$$

se determină N soluții $\text{tg } \varphi_r$, deci valoarea celor N defazaje caracteristice φ_r la pulsația ω . Repetind măsurările la diferite pulsații excitatoare, se trasează apoi graficul variației defazajelor caracteristice cu pulsația. Abscisele punctelor în care curbele defazajelor caracteristice intersectează orizontala de ordonată $\varphi = 90^\circ$ determină pulsațiile proprii ale sistemului.

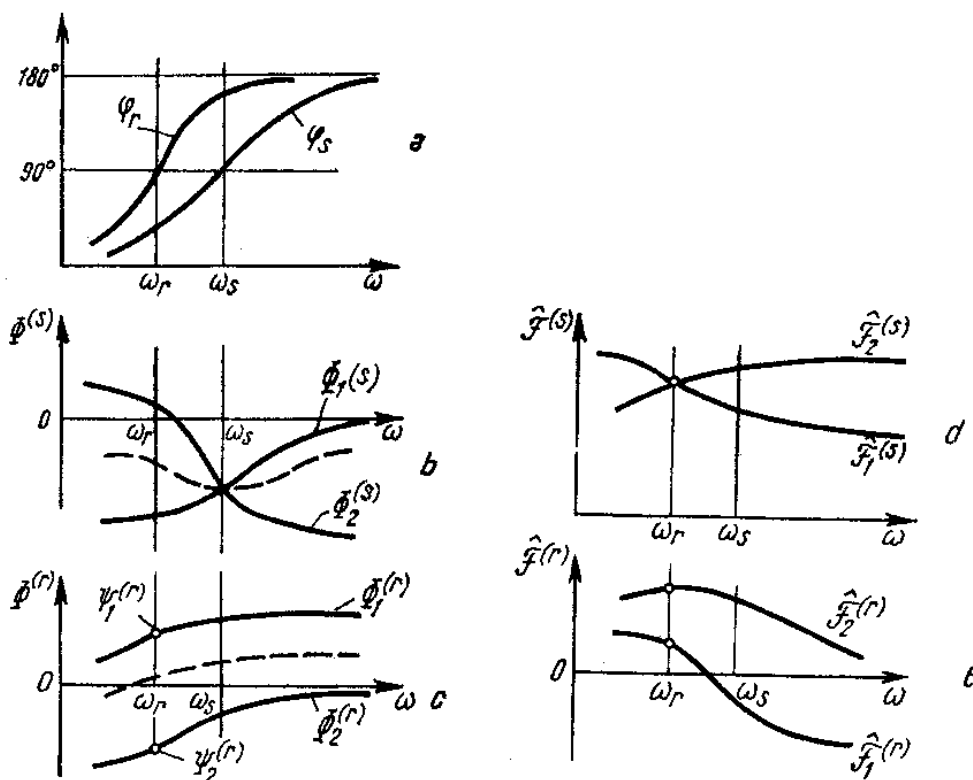


Fig. 6.9

În figura 6.9 *a* se prezintă alura acestor diagrame pentru două defazaje caracteristice.

Metoda a fost aplicată la un sistem cu două grade de libertate [119] dovedindu-se mai precisă decât metoda Kennedy-Pancu [61] în cazul existenței a două moduri de vibrație cu pulsații proprii foarte apropiate.

Tot analitic, pe baza ecuației (6.133), se calculează vectorii modurilor forțate de solicitare $\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}$, iar din ecuația (6.134) — vectorii modurilor de distorsiune, care se pot reprezenta grafic sub forma unor curbe de variație cu pulsația a deplasării normalizate din fiecare punct (fig. 6.9 *b* și *c*) și a forței normalizate din fiecare punct (fig. 6.9 *d* și *e*).

Forma modurilor de distorsiune la o pulsație oarecare ω se obține intersectând curbele deplasărilor normalizate cu dreapta de abscisă ω . În particular, forma modului propriu „clasic” de vibrație $\{\Psi^{(r)}\}$ se determină prin ordonatele punctelor de intersecție a curbelor $\Phi_j^{(r)}$ cu verticala de abscisă ω_r (fig. 6.9 *c*).

Identificarea parametrilor fizici ai sistemului se face pe baza elementelor matricei receptanțelor complexe, măsurate la două pulsații excitatoare $\bar{\omega}_a$ și $\bar{\omega}_b$ diferite. Pentru aceasta, este necesară mai întâi inversarea matricei receptanțelor și calculul matricei obstructanțelor complexe

$$[\bar{\beta}] = [\beta_R] + i[\beta_I] = [\bar{\alpha}]^{-1} \quad (6.144)$$

în care, conform relației (3.89),

$$[\beta_R] = [K] - \omega^2[M], \quad (6.145)$$

$$[\beta_I] = \omega[C] + [H]. \quad (6.146)$$

Calculînd deci matricele (6.145) și (6.146) la două pulsații $\bar{\omega}_a$ și $\bar{\omega}_b$, se obține

$$[M] = \frac{[\beta_R(\bar{\omega}_a)] - [\beta_R(\bar{\omega}_b)]}{\bar{\omega}_b^2 - \bar{\omega}_a^2}, \quad (6.147)$$

$$[K] = \frac{\bar{\omega}_b^2[\beta_R(\bar{\omega}_a)] - \bar{\omega}_a^2[\beta_R(\bar{\omega}_b)]}{\bar{\omega}_b^2 - \bar{\omega}_a^2}, \quad (6.148)$$

$$[C] = \frac{[\beta_I(\bar{\omega}_a)] - [\beta_I(\bar{\omega}_b)]}{\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_b}, \quad (6.149)$$

$$[H] = \frac{\bar{\omega}_a[\beta_I(\bar{\omega}_b)] - \bar{\omega}_b[\beta_I(\bar{\omega}_a)]}{\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_b}. \quad (6.150)$$

În cazul cînd există doar amortizare histeretică $[C] = [0]$ și $[H] = [\beta_I]$. Dacă există doar amortizare viscoasă $[H] = [0]$ și $[C] = \frac{1}{\omega} [\beta_I]$.

Nissim [83] recomandă să se calculeze mai întii matricele (6.147) — (6.150) și apoi pulsațiile proprii ω_r și modurile proprii de vibrație, arătînd că, deoarece defazațele caracteristice φ_r sînt de obicei mici, calculul valorilor ω_r cu metoda Traill-Nash poate duce la erori mari.

Pe de altă parte, inversiunea (6.144) poate introduce la rîndul ei erori mari în cazul cînd matricea $[\bar{\alpha}]$ este rău condiționată, astfel că metoda poate fi aplicată cu bune rezultate doar la sistemele cu număr redus de grade de libertate și cu pulsații proprii relativ apropiate.

Cottin și Dellinger [26] au propus o metodă de identificare bazată pe teoria modurilor complexe de vibrație ale sistemelor cu amortizare viscoasă (§ 3.2.4.1.).

Receptanța complexă directă în punctul de excitație l al unei structuri cu amortizare neproporțională este dată de expresia (3.186)

$$\bar{\alpha}_{ll} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\delta_{ll}^{(r)}}{i\omega - \sigma_r} + \frac{\delta_{ll}^{(r)*}}{i\omega - \sigma_r^*} \right). \quad (6.151)$$

Se măsoară această receptanță la $2N$ pulsații excitatoare și se grupează valorile obținute în două matrice coloană

$$\begin{aligned} \{\bar{\alpha}_I\} &= \{\bar{\alpha}_{ll}(\bar{\omega}_1) \quad \bar{\alpha}_{ll}(\bar{\omega}_2) \quad \dots \quad \bar{\alpha}_{ll}(\bar{\omega}_N)\}^T, \\ \{\bar{\alpha}_{II}\} &= \{\bar{\alpha}_{ll}(\bar{\omega}_{N+1}) \quad \bar{\alpha}_{ll}(\bar{\omega}_{N+2}) \quad \dots \quad \bar{\alpha}_{ll}(\bar{\omega}_{2N})\}^T. \end{aligned} \quad (6.152)$$

Evaluînd analitic aceste **receptanțe** pe baza relației (6.151) se obțin $2N$ ecuații, care se pot scrie condensat sub forma

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{\alpha}_I\} \\ \{\bar{\alpha}_{II}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_I] & [Q_I] \\ [N_{II}] & [Q_{II}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\delta^*\} \end{Bmatrix}. \quad (6.153)$$

În relația (6.153) s-a notat

$$\{\delta\} = \{\delta_{II}^{(1)} \ \delta_{II}^{(2)} \ \dots \ \delta_{II}^{(N)}\}^T, \quad \{\delta^*\} = \{\delta_{II}^{(1)*} \ \delta_{II}^{(2)*} \ \dots \ \delta_{II}^{(N)*}\}^T,$$

$$[N_I] = \begin{bmatrix} \frac{1}{i\bar{\omega}_1 - \sigma_1} & \dots & \frac{1}{i\bar{\omega}_1 - \sigma_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{i\bar{\omega}_N - \sigma_1} & \dots & \frac{1}{i\bar{\omega}_N - \sigma_N} \end{bmatrix}, \quad [Q_I] = \begin{bmatrix} \frac{1}{i\bar{\omega}_1 - \sigma_1^*} & \dots & \frac{1}{i\bar{\omega}_1 - \sigma_N^*} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{i\bar{\omega}_N - \sigma_1^*} & \dots & \frac{1}{i\bar{\omega}_N - \sigma_N^*} \end{bmatrix},$$

$$[N_{II}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{i\bar{\omega}_{N+1} - \sigma_1} & \dots & \frac{1}{i\bar{\omega}_{N+1} - \sigma_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{i\bar{\omega}_{2N} - \sigma_1} & \dots & \frac{1}{i\bar{\omega}_{2N} - \sigma_N} \end{bmatrix}, \quad [Q_{II}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{i\bar{\omega}_{N+1} - \sigma_1^*} & \dots & \frac{1}{i\bar{\omega}_{N+1} - \sigma_N^*} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{i\bar{\omega}_{2N} - \sigma_1^*} & \dots & \frac{1}{i\bar{\omega}_{2N} - \sigma_N^*} \end{bmatrix}.$$

Sistemul (6.153) conține $2N$ ecuații avînd N necunoscute σ_r și N necunoscute $\delta_{II}^{(r)}$.

Pentru rezolvarea numerică a sistemului (6.153) se recomandă scrierea lui sub forma

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{\alpha}_I\} \\ \{\bar{\alpha}_{II}^*\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_I] & [Q_I] \\ [Q_{II}^*] & [N_{II}^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\delta^*\} \end{Bmatrix} \quad (6.154)$$

unde * indică conjugata complexă. Folosirea vectorului $\{\bar{\alpha}_{II}^*\}$ în locul conjugatului $\{\bar{\alpha}_{II}\}$ duce la o mai bună condiționare a matricei pătrate din relația (6.154).

Calculul celor N necunoscute σ_r se face determinînd zerourile funcției

$$F(\sigma) = \{\delta\} - \{\delta^*\}^* = \{0\} \quad (6.155)$$

unde $\{\delta^*\}^*$ este conjugatul complex al lui $\{\delta^*\}$. Pentru aceasta se recomandă metoda iterativă a lui Krawczyk [65], cu ajutorul căreia se calculează și valorile $\delta_{II}^{(r)}$.

Dacă se normalizează coeficienții $\delta_{II}^{(r)}$, alegînd $u_r = 1$ în relația (3.185), rezultă valorile $q_i^{(r)}$.

Repetînd măsurările pentru toate punctele l ale structurii, se pot determina vectorii modali $\{q^{(r)}\}$, apoi, pe baza relației (3.162), vectorii $\{\xi^{(r)}\}$, deci matricea modală $[\xi]$.

Din relația (3.161) se calculează v . Apoi, din (3.169) și (3.170) rezultă matricele $[U]$ și $[V]$, deci matricea dinamică (3.156) iar din (3.150) matricele $[C]$ și $[K]$, dacă se cunoaște $[M]$.

6.3.2. Metoda supraîncărcărilor independente

O variantă a metodei forțelor independente a fost propusă în 1970 de Feix [34] și aplicată practic de Ratjen și Möhlenkamp [99] pe un model în laborator.

Se consideră un sistem liniar, cu amortizare proporțională, cu număr redus de grade de libertate, excitat în regim armonic de o forță ce poate să nu fie cunoscută.

Mișcarea sistemului în regim armonic staționar este descrisă de ecuația (3.38)

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{\hat{q}\} = \{\hat{f}\} \quad (6.156)$$

în care coloana $\{\hat{f}\}$ are un singur element.

În condițiile menținerii constante a excitației, atașarea unor mase adiționale, a căror matrice este $[\Delta M]_l$, produce un vector răspuns adițional $\{\Delta\hat{q}\}_l$. Ecuația (6.156) devine

$$(-\omega^2[M + \Delta M]_l + i\omega[C] + [K])\{\hat{q} + \Delta\hat{q}_l\} = \{\hat{f}\}. \quad (6.157)$$

Termenul din membrul stîng datorit maselor adiționale poate fi trecut în membrul drept, ca un vector adițional al excitației

$$\{\Delta\hat{f}\}_l = \omega^2[\Delta M]_l\{\hat{q} + \Delta\hat{q}_l\}. \quad (6.158)$$

Rezultă

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{\hat{q} + \Delta\hat{q}_l\} = \{\hat{f} + \Delta\hat{f}_l\}. \quad (6.159)$$

Scăzînd ecuațiile (6.151) și (6.154) membru cu membru, se obține

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{\Delta\hat{q}\}_l = \{\Delta\hat{f}\}_l. \quad (6.160)$$

Pentru $l = 1, 2, \dots, N$ distribuții de mase adiționale $[\Delta M]_l$, alese astfel încît să rezulte N distribuții de forțe $\{\Delta\hat{f}\}_l$ liniar independente, se pot forma matricele pătrate

$$[\Delta\hat{q}] = [\{\Delta\hat{q}\}_1 \ \{\Delta\hat{q}\}_2 \ \dots \ \{\Delta\hat{q}\}_l \ \dots \ \{\Delta\hat{q}\}_N], \quad (6.161)$$

$$[\Delta\hat{f}] = [\{\Delta\hat{f}\}_1 \ \{\Delta\hat{f}\}_2 \ \dots \ \{\Delta\hat{f}\}_l \ \dots \ \{\Delta\hat{f}\}_N], \quad (6.162)$$

deci cele N ecuații (6.160) se scriu sub forma

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])[\Delta\hat{q}] = [\Delta\hat{f}]. \quad (6.163)$$

Ecuatia (6.163) se mai scrie

$$[\bar{\beta}] [\Delta\tilde{q}] = [\Delta\hat{f}] \quad (6.164)$$

de unde se calculează

$$[\bar{\beta}] = [\Delta\hat{f}][\Delta\tilde{q}]^{-1} \quad (6.165)$$

Evaluind matricea $[\bar{\beta}]$ la două pulsații $\bar{\omega}_a$ și $\bar{\omega}_b$, cu ajutorul relațiilor (6.147) — (6.150) se calculează matricele sistemului.

Cele două pulsații se aleg în vecinătatea unor pulsații proprii ale sistemului și în nici un caz mai mari decât pulsația proprie ω_N .

Dacă se cunoaște forța excitatoare, se pot folosi doar $(N - 1)$ distribuții de mase adiționale.

Ca și metoda forțelor independente, metoda suprasarcinilor independente este adecvată studiului dinamic în laborator al machetelor simple și al modelelor cu parametri concentrați, cu număr redus de grade de libertate.

O îmbunătățire a metodei precedente este prezentată în lucrarea [35].

Identificarea sistemelor neliniare cu un grad de libertate

Dacă în încercarea la rezonanță a structurilor mecanice se ating amplitudini relativ mari de vibrație, răspunsul prezintă particularitățile unui sistem cu caracteristică elastică sau de amortizare neliniare. Acest fapt a fost semnalat încă din 1963 de către de Vries [131] care a arătat că anomaliile ce apar în repartiția parametrului frecvență în lungul diagramelor polare ale mobilității, precum și aplatisarea acestora, pot fi explicate prin existența unor neliniarități ale celor două caracteristici ale sistemului.

În general, se admite că neliniaritățile mici nu afectează principiile de bază asupra modurilor de vibrație și a suprapunerii lor liniare. În schimb, determinarea frecvenței de rezonanță (mai corect — a „rezonanței” principale) și a parametrilor modali se lovește de dificultăți serioase, obișnuitele criterii de localizare a rezonanței devenind inaplicabile.

Considerînd doar sisteme cu frecvențe proprii relativ depărtate și neliniarități „mici”, într-o primă aproximație se poate admite că, în vecinătatea „rezonanțelor”, răspunsul acestora poate fi descris de ecuația de mișcare a sistemului cu un grad de libertate, cu amortizare histeretică (echivalentă) și caracteristică elastică cubică de forma

$$f_e(x) = k(x + \mu x^3),$$

unde μ este un coeficient de neliniaritate.

Pe baza analizei răspunsului în frecvență al acestui tip de oscilator neliniar, autorul a elaborat o serie de metode de identificare a parametrilor dinamici ai sistemelor slab neliniare, aplicate cu succes la determinarea proprietăților dinamice ale unor materiale folosite la izolarea vibrațiilor [92, 94, 97].

7.1. Metode bazate pe folosirea excitației armonice

7.1.1. Diagrama polară a răspunsului în frecvență

Ecuația mișcării unui oscilator cu amortizare histeretică și caracteristică elastică cubică, supus acțiunii unei forțe armonice $f(t) = \hat{f} \cos \omega t$, se poate scrie

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega} \dot{x} + k(x + \mu x^3) = \hat{f} \cos \omega t, \quad (7.1)$$

care poate fi considerată o formă a ecuației lui Duffing cu amortizare.

Înlocuind în ecuația (7.1) o soluție aproximativă de forma

$$x(t) = \hat{x}_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad (7.2)$$

unde \hat{x}_1 este amplitudinea primei armonice a răspunsului, neglijând deci armonicele de ordin superior și egalând coeficienții termenilor în $\cos \omega t$ și $\sin \omega t$ din ambii membri, rezultă

$$\Omega^2 = 1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 \mp \sqrt{\frac{1}{a^2} - g^2}, \quad (7.3)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{g}{\Omega^2 - 1 - \frac{3}{4} \gamma a^2} = \operatorname{arctg} \frac{g}{\mp \sqrt{\frac{1}{a^2} - g^2}}, \quad (7.4)$$

unde s-a notat

$$g = \frac{h}{k}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \mu \frac{\hat{f}^2}{k^2}, \quad a = \hat{x}_1 \frac{k}{\hat{f}}. \quad (7.5)$$

De remarcat că funcția a definită de (7.3) nu este propriu-zis o receptanță adimensională, deoarece \hat{x}_1 nu este amplitudinea răspunsului (care este periodic, dar nu sinusoidal). Datorită aproximării prin prima armonică, a devine o „funcție de descriere” a răspunsului, depinzând atât de ω cât și de \hat{f} , pentru că nu există proporționalitate între cauză și efect, ca la sistemele liniare. Aceasta face ca locul de transfer al sistemului neliniar să nu mai fie o curbă gradată în pulsație, ci o familie de curbe, având drept parametru amplitudinea forței \hat{f} .

Dacă se consideră o funcție complexă adimensională

$$\tilde{a} = a_R + ia_I = a \cos \varphi + i a \sin \varphi, \quad (7.6)$$

cele două componente vectoriale au expresiile

$$a_R = \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 - \Omega^2\right) a^2, \quad (7.7)$$

$$a_I = -ga^2, \quad (7.8)$$

unde a este definit de relația (7.3).

Eliminând a și Ω^2 între relațiile (7.3), (7.7) și (7.8) rezultă ecuația unui cerc

$$a_R^2 + \left(a_I + \frac{1}{2g}\right)^2 = \frac{1}{4g^2} \quad (7.9)$$

care reprezintă locul geometric al extremității vectorului \tilde{a} în planul complex. Ecuația (7.9) este identică cu ecuația (2.37) obținută pentru oscilatorul liniar ($\mu = 0$); deci, pentru aceleași valori \hat{f}/k și g , diagramele polare

vor avea aceeași formă. În figura 7.1 se arată, pentru comparație, diagramele polare ale cantității \tilde{a} , pentru $g = 0,04$, $\gamma = 0$ și $\gamma = 10^{-4}$, „gradate” cu valorile pulsației adimensionale Ω . Se observă imediat diferența în distribuția parametrului Ω în lungul cercurilor și faptul că, la sistemul neliniar, raportul $\Delta s/\Delta\Omega$ nu mai are valoare maximă la $\varphi = -90^\circ$, deci criteriul Kennedy-Pancu nu mai poate fi aplicat.

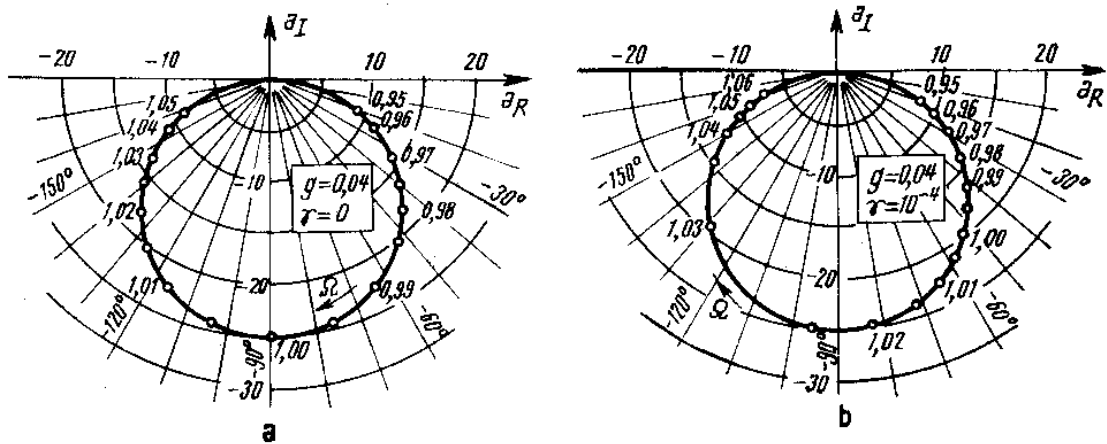


Fig. 7.1

În figura 7.2 s-au reprezentat punctele semnificative ale celor două diagrame, gradate în pulsația ω . La sistemul linear (fig. 7.2 a) punctul M definește pulsația de rezonanță $\omega_n = \sqrt{k/m}$, iar punctele de semiputare B și C definesc pulsațiile $\omega_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \mp g}$. La sisteme neliniare (fig. 7.2 b), pulsația punctului de intersecție M al cercului cu semi-axa imaginară negativă este

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{g^2}} \neq \omega_n \quad (7.10)$$

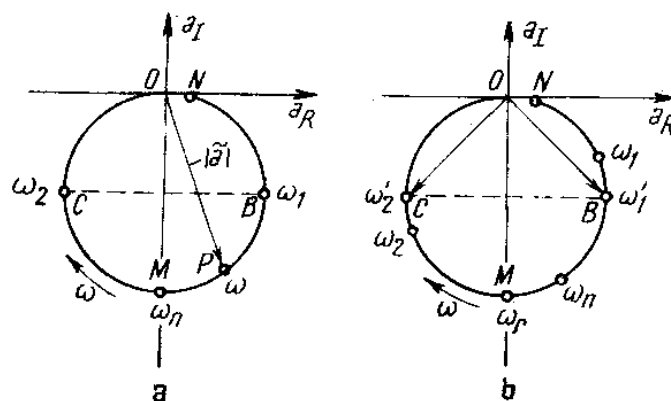


Fig. 7.2

iar pulsațiile punctelor în care diametrul BC , perpendicular pe OM , intersectează cercul, sînt

$$\omega'_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \mp g + \frac{3}{8} \frac{\gamma}{g^2}} \neq \omega_{1,2}. \quad (7.11)$$

La sistemele cu caracteristică elastică „tare” (fig. 7.2 b), $\mu > 0$, deci $\gamma > 0$, prin urmare $\omega_r > \omega_n$, $\omega'_1 > \omega_1$, $\omega'_2 > \omega_2$, deci pulsațiile sînt „deplasate” în lungul cercului în sens trigonometric.

La sistemele cu caracteristică elastică „moale”, $\mu < 0$, deci $\gamma < 0$, prin urmare $\omega_r < \omega_n$, $\omega'_1 < \omega_1$, $\omega'_2 < \omega_2$ iar „deplasarea” pulsațiilor față de sistemul liniar se face în sens orar.

„Deplasarea pulsațiilor” pe diagramele polare ale funcției adimensionale complexe \tilde{a} apare mai sugetiv dacă se trasează mai multe diagrame polare ale deplasării, pentru diferite valori ale amplitudinii forței perturbatoare.

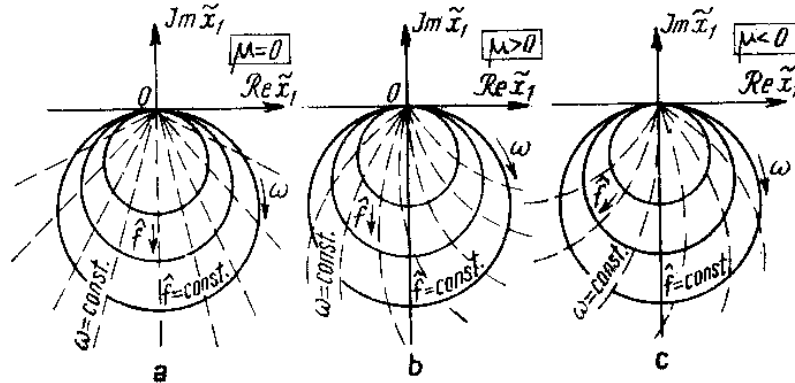


Fig. 7.3

În figura 7.3, punctele în care pulsația are aceeași valoare s-au unit prin linii întrerupte. La sistemele liniare (fig. 7.3 a), liniile de pulsație constantă sînt drepte concurente în origine. La sistemele cu caracteristică elastică „tare” (fig. 7.3 b), aceste linii se curbează spre pulsațiile joase, iar la sistemele cu caracteristică „moale” (fig. 7.3 c) spre pulsațiile înalte. Prin urmare, trasarea experimentală a liniilor de pulsație constantă oferă un mijloc de determinare a tipului nealiniarității caracteristicii elastice.

Forma diagramelor polare dă indicații asupra nealiniarității caracteristicii de amortizare. Dacă acestea sînt cercuri, amortizarea este liniară. Frecarea coulombiană produce ovalizarea diagramelor polare în direcția semi-axe imaginare negative, iar frecarea proporțională cu pătratul vitezei determină alungirea diagramei în direcția paralelă cu axa reală.

7.1.2. Fenomene de salt

Dacă se trasează diagramele polare ale deplasării $\tilde{x}_1 = x_{1R} + ix_{1I} = \hat{x}_1 \cos \varphi + i \hat{x}_1 \sin \varphi$ pentru diferite valori \hat{f}/k (fig. 7.4), se observă că liniile de pulsație constantă se curbează atît de mult, încît devin tangente la cercurile de răspuns.

Locul geometric al punctelor de tangență ale diagramelor polare cu liniile de pulsație constantă (desenat cu linie groasă) este o „curbă limită”, care separă domeniul regimurilor de vibrații stabile, de cel al regimurilor instabile, fiind definită de relațiile

$$\Omega^2 = 1 + \frac{3}{2} \mu \hat{x}_1^2 \pm \sqrt{\frac{9}{16} \mu^2 \hat{x}_1^4 - g^2}, \quad (7.12)$$

$$\varphi = \arctg \frac{1}{g} \left(\frac{3}{4} \mu \hat{x}_1^2 \pm \sqrt{\frac{9}{16} \mu^2 \hat{x}_1^4 - g^2} \right). \quad (7.13)$$

Curba limită XLY , trasată pentru o anumită valoare μ , este simetrică în raport cu dreapta $\varphi = -135^\circ$ și tangentă la cercul cu centrul în origine și rază $\hat{x}_{1L} = \sqrt{\frac{4g}{3\mu}}$, reprezentând amplitudinea minimă a deplasării la care poate apare fenomenul de salt. Ea este tangentă în K la

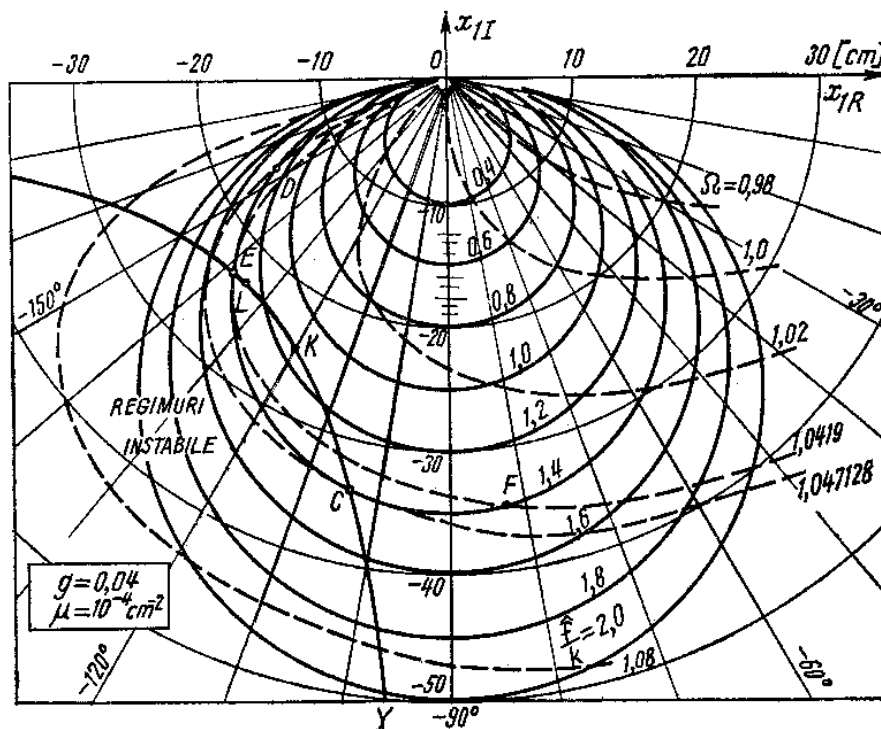


Fig. 7.4

diagrama polară de parametru $\frac{\hat{f}}{k} = \sqrt{\frac{32g^3}{9\sqrt{3}\mu}}$ și la curba de pulsație

constantă $\Omega_K = \sqrt{1 + \sqrt{3}g}$. Rezultă că pentru forțe $\hat{f} > k \sqrt{\frac{32g^3}{9\sqrt{3}\mu}}$ și

pulsații $\omega > \omega_n \sqrt{1 + \sqrt{3}g}$, curba limită intersectează cercurile răspunsului și curbele de pulsație constantă, putînd apare fenomenele de salt. Punctele situate pe arcele de curbă delimitate de aceste intersecții definesc regimuri instabile de vibrații.

Cu ajutorul diagramelor din figura 7.4 se pot explica cele două tipuri de discontinuități semnalate experimental, ce apar în variația amplitudinii și fazei vibrației armonice atunci cînd se fac măsurări cu baleiaj de frecvență (la $\hat{f} = \text{const.}$) sau cînd variază amplitudinea forței perturbatoare (la $\omega = \text{const.}$).

Dacă $\hat{f} = \text{const.}$ și pulsația ω crește progresiv de la zero, atunci punctul P , care definește regimul de vibrație, parcurge cercul de răspuns (fig. 7.5) în sens orar, amplitudinea și faza variînd progresiv pînă în punctul C , unde cercul $\hat{f} = \text{const.}$ este tangent la linia $\omega'' = \text{const.}$ La o creștere ulterioară a pulsației, amplitudinea și faza răspunsului au un salt la valo-

rile corespunzătoare punctului D , în care linia $\omega'' = \text{const.}$ intersectează cercul, după care variază continuu, vârful vectorului \tilde{x}_1 parcurgând arcul de cerc DO .

Cînd pulsația scade continuu, vârful vectorului \tilde{x}_1 parcurge cercul în sens trigonometric de la O , spre D , pînă în punctul E , punctul de tangență cu linia $\omega' = \text{const.}$ Urmează un salt pînă în punctul F , unde linia $\omega' = \text{const.}$ intersectează cercul, după care tinde spre punctul N , de pulsație $\omega = 0$.

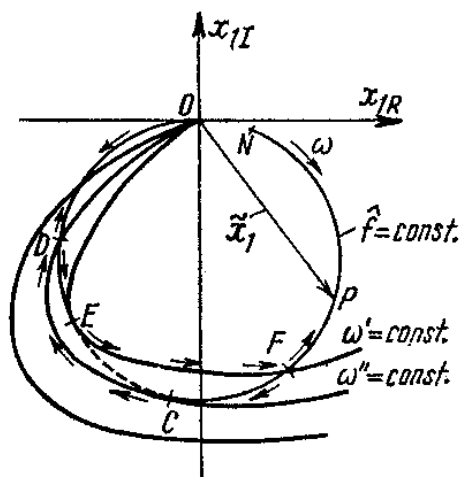


Fig. 7.5

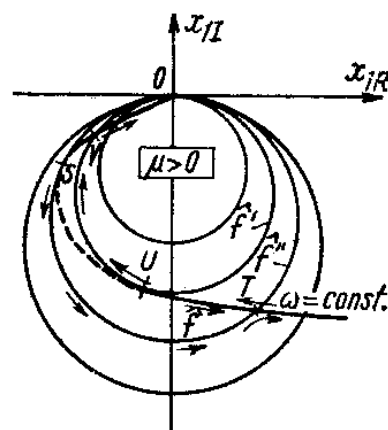


Fig. 7.6

Rezultă că numai punctele de pe arcul OE definesc regimuri instabile. Cele de pe arcele FC și DE definesc regimuri condiționat instabile. În general, salturile nu se fac brusc. Amplitudinea și faza răspunsului variază cu o viteză finită (funcție de amortizarea din sistem) în cadrul unui regim tranzitoriu care face trecerea între cele două regimuri staționare limită.

În figura 7.6 se poate urmări fenomenul de salt care apare atunci cînd, menținînd $\omega = \text{const.}$, amplitudinea forței perturbatoare variază continuu. Dacă \hat{f} crește progresiv de la zero, extremitatea vectorului răspunsului parcurge curba $\omega = \text{const.}$ de la O , la V , pînă în S , punctul de tangență cu cercul $\hat{f}'' = \text{const.}$ La o creștere ulterioară a forței, amplitudinea și faza răspunsului au salturi la valorile corespunzătoare punctului T , în care cercul $\hat{f}'' = \text{const.}$ intersectează curba $\omega = \text{const.}$, după care variază continuu. La descreșterea forței \hat{f} , vârful vectorului \tilde{x}_1 parcurge curba $\omega = \text{const.}$ în sens contrar, prin T pînă în U , punctul de tangență cu cercul $\hat{f}' = \text{const.}$ Urmează un salt pînă în punctul V , situat pe același cerc, după care se tinde spre originea O .

Cunoașterea particularităților fenomenelor de salt permite completarea diagramelor polare cu zonele condiționat instabile și o explicare corectă a unor anomalii aparente ce apar în timpul trasării automate a acestor diagrame.

7.1.3. Identificarea parametrilor dinamici ai sistemului

Pentru determinarea parametrilor dinamici ai sistemului oscilant, în lucrarea [92] autorul a propus următoarea metodă.

Se înregistrează mai multe diagrame polare ale deplasării masei m pentru diferite valori \hat{f} ale amplitudinii forței perturbatoare (fig. 7.7), pe care se determină punctele corespunzătoare amplitudinii maxime a deplasării. În cazul amortizării proporționale și a unei izolări perfecte a modului de vibrație studiat, acestea corespund unui defazaj de -90° . Dacă diagramele pot fi approximate cu cercuri și dacă se pot stabili egalitățile

$$\frac{\hat{f}'}{OM'} = \frac{\hat{f}''}{OM''} = \frac{\hat{f}'''}{OM'''} = \dots,$$

modelul amortizării histeretice este valabil.

Fie ω'_r și ω''_r pulsațiile corespunzătoare punctelor M' și M'' , de amplitudine maximă a răspunsului, pe două diagrame înregistrate pentru forțe de excitație \hat{f}' , respectiv $\hat{f}'' > \hat{f}'$ (fig. 7.7). Pe baza relației (7.11) rezultă că diametrul $B'C'$, perpendicular pe OM' , intersectează cercul $\hat{f}' = \text{const.}$ în punctele de pulsații

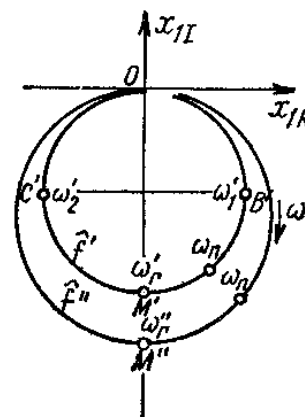


Fig. 7.7

$$\omega'_1 = \omega_n \sqrt{1 - g + \frac{3}{4} \mu \overline{OB'}^2},$$

$$\omega'_2 = \omega_n \sqrt{1 + g + \frac{3}{4} \mu \overline{OC'}^2}.$$

Deoarece $\overline{OB'} = \overline{OC'}$, se obține

$$\omega_2'^2 - \omega_1'^2 = 2g \omega_n^2,$$

de unde rezultă factorul de amortizare histeretică echivalentă

$$g = \frac{\omega_2'^2 - \omega_1'^2}{2\omega_n^2}. \quad (7.14)$$

Dacă se notează

$$\overline{OM'} = x'_r \text{ și } \overline{OM''} = x''_r,$$

relația (7.10) se scrie

$$\omega'_r = \omega_n \sqrt{1 + \frac{3}{4} \mu x_r'^2},$$

$$\omega''_r = \omega_n \sqrt{1 + \frac{3}{4} \mu x_r''^2},$$

de unde rezultă

$$\omega_n^2 = \frac{\omega_r'^2 - \left(\frac{\omega_r'}{\omega_r''}\right)^2 \omega_r''^2}{1 - \left(\frac{\omega_r'}{\omega_r''}\right)^2} \quad (7.15)$$

și coeficientul de neliniaritate

$$\mu = \frac{4}{3} \frac{1 - \left(\frac{\omega_r'}{\omega_r''}\right)^2}{x_r''^2 \left(\frac{\omega_r'}{\omega_r''}\right)^2 - x_r'^2}. \quad (7.16)$$

Înlocuind expresia (7.15) în relația (7.14) se obține factorul de amortizare g . Panta caracteristicii elastice în origine este

$$k = \frac{1}{g} \frac{\hat{f}'}{x_r'} = \frac{1}{g} \frac{\hat{f}''}{x_r''}. \quad (7.17)$$

Ceilalți parametri se calculează cu relațiile

$$m = \frac{k}{\omega_n^2}, \quad h = gk.$$

Un exemplu de aplicare practică a acestei metode la determinarea caracteristicilor dinamice ale spumelor poliuretanică este dat în lucrarea [92].

În cazul apariției fenomenelor de salt, gradarea în frecvență a diagramelor polare este incompletă, uneori pulsațiile ω_r nu pot fi localizate pe diagrame, fiind necesară micșorarea amplitudinii forțelor excitatoare \hat{f} .

7.2. Metode bazate pe folosirea excitației armonice cu forțe în cvadratură

7.2.1. Diagramele polare ale răspunsului în frecvență

Ecuația de mișcare a unui oscilator cu amortizare histeretică și caracteristică elastică cubică, supus acțiunii unei forțe armonice avînd o componentă de bază $\hat{f} \cos \omega t$ și o componentă în cvadratură $\lambda \hat{f} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$, se poate scrie sub forma

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega} \dot{x} + k(x + \mu x^3) = \hat{f} (\cos \omega t - \lambda \sin \omega t) \quad (7.18)$$

unde λ este raportul amplitudinilor celor două componente ale forței, celelalte notații fiind aceleași ca în capitolul 2 și § 7.1.

Folosind metoda liniarizării armonice, dacă se caută o soluție de forma (7.2), neglijând armonicile de ordin superior, se obține

$$\Omega^2 = 1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 \mp \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{a^2} - g^2}, \quad (7.19)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda - \frac{g}{1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 - \Omega^2}}{1 + \lambda \frac{g}{1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 - \Omega^2}}, \quad (7.20)$$

unde s-au folosit notațiile (7.5).

Funcția complexă (7.6) are componentele

$$a_R = \frac{a^2}{1 + \lambda^2} \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 - \Omega^2 + \lambda g \right), \quad (7.21)$$

$$a_I = -\frac{a^2}{1 + \lambda^2} \left[g - \lambda \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 - \Omega^2 \right) \right], \quad (7.22)$$

unde $a = \sqrt{a_R^2 + a_I^2}$ este dat de relația (7.19).

Eliminând a și Ω între expresiile (7.21) și (7.22), se obține ecuația unei familii de cercuri

$$\left(a_R - \frac{\lambda}{2g} \right)^2 + \left(a_I + \frac{1}{2g} \right)^2 = \frac{1 + \lambda^2}{4g^2} \quad (7.23)$$

care reprezintă locul geometric al extremității vectorului \tilde{a} în planul complex. Ecuația (7.23) este identică cu cea obținută pentru oscilatorul liniar (2.112), deci, pentru aceleași valori \hat{f}/k , g și λ diagramele polare vor fi cercuri de același diametru.

În figura 7.8 a se prezintă două cercuri (7.23) calculate pentru $g = 0,04$, $\gamma = 10^{-4}$, $\lambda = 0$ și respectiv $\lambda = 1$. Pentru comparație, în

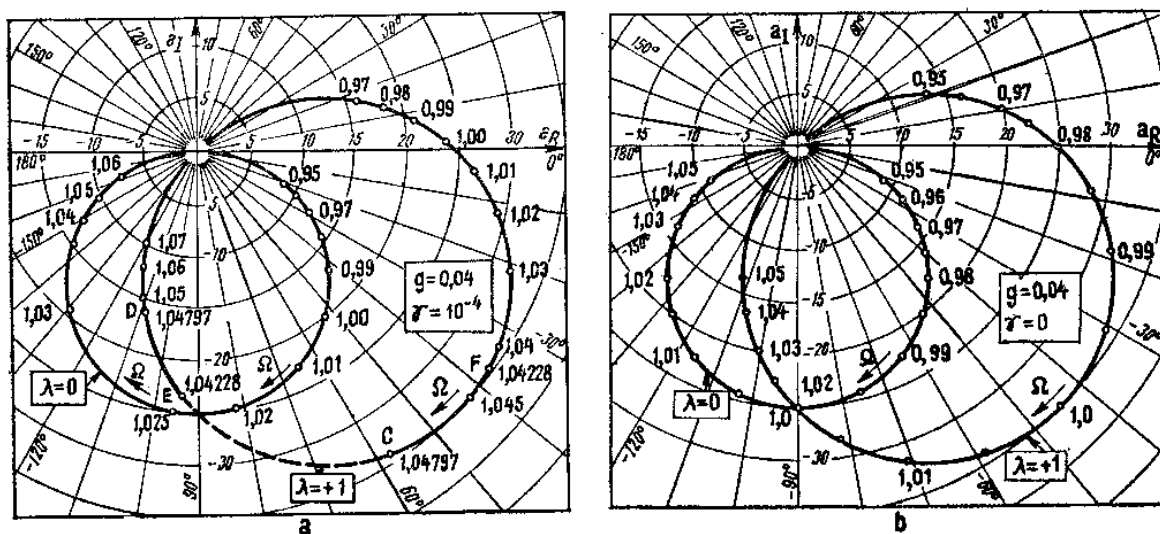


Fig. 7.8

figura 7.8 b se prezintă aceleași cercuri trasate pentru $g = 0,04$ și $\gamma = 0$, deci pentru sistemul liniar.

La sistemul neliniar (fig. 7.8 a) se observă o „deplasare” a pulsațiilor în lungul cercului, în sens orar, față de diagramele sistemului liniar (fig. 7.8 b). La creșteri egale $\Delta\Omega = 0,01$ ale pulsației excitatoare, arcul de cerc Δs de lungime maximă nu mai apare în zona amplitudinii maxime a răspunsului, deci metoda Kennedy-Pancu nu poate fi utilizată. În schimb, cercul $\lambda = +1$ taie cercul $\lambda = 0$ în punctul ce corespunde amplitudinii maxime a deplasării, ceea ce sugerează posibilitatea aplicării metodei celor trei cercuri (v. § 2.3.1.1) și la identificarea sistemelor neliniare.

Totuși, după cum reiese din figura 7.8 a, utilizarea acestei metode este îngreunată de fenomenele de „salt” ce apar odată cu creșterea parametrului λ , deci a amplitudinii $\hat{f}\sqrt{1 + \lambda^2}$ a forței excitatoare totale. Astfel, după cum se arată în detaliu în paragraful următor, punctele de pe arcul CE al cercului $\lambda = +1$ definesc regimuri de vibrații instabile, deci arcul CE nu poate fi gradat în frecvență experimental. Prin baleiajul continuu al pulsației, la creșterea lui Ω , extremitatea vectorului \tilde{a} parcurge cercul în sens orar iar la $\Omega = 1,04797$ „sare” din punctul C în D ; la scăderea lui Ω , cercul este parcurs în sens trigonometric, cu un salt la $\Omega = 1,04228$ din punctul E în F . Rezultă că nu se poate determina pulsația corespunzătoare punctului de intersecție al celor două cercuri (pe cercul $\lambda = +1$), ceea ce impune scăderea nivelului excitației sau a valorii parametrului λ .

În figura 7.9 s-au trasat diagramele polare (7.23) pentru $g = 0,04$, $\gamma = 10^{-4}$ și mai multe valori λ . Cercurile formează un fascicul eliptic, avînd axa imaginară drept axă radicală.

Pentru cîteva valori ale pulsației excitatoare Ω , punctele de pulsație constantă de pe diferitele cercuri au fost unite prin linii întrerupte. Ecuația acestor linii se obține eliminînd λ între relațiile (7.21) și (7.22)

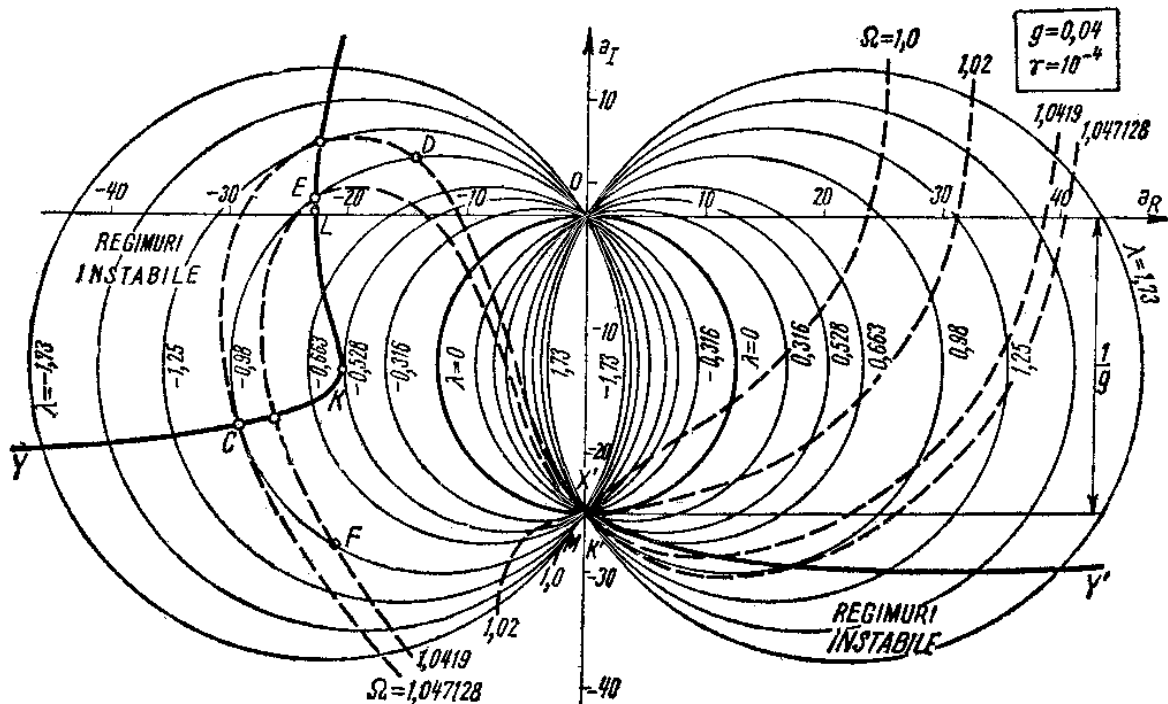


Fig. 7.9

Rezultă

$$a_I = \frac{1}{g} \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 - \Omega^2 \right) a_R - \frac{1}{g}. \quad (7.24)$$

Pentru $\gamma = 0$, deci la sisteme liniare, ecuația (7.24) descrie linii drepte concurente în punctul $M \left(0, -\frac{1}{g} \right)$. Pentru $\gamma \neq 0$, ecuația (7.24) descrie curbe, de asemenea concurente în punctul M , cu atât mai depărtate de linii drepte cu cât $|\lambda|$, deci $\hat{f} \sqrt{1 + \lambda^2}$, este mai mare.

Din figura 7.9 se observă că pe măsură ce $|\lambda|$ crește, liniile de pulsație constantă se curbează atât de mult încît devin tangente la cercurile de răspuns (7.23). Locul geometric al punctelor de tangență (desenat cu linie groasă), definit de ecuațiile

$$\Omega^2 = 1 + \frac{3}{2} \gamma a^2 \pm \sqrt{\frac{9}{16} \gamma^2 a^4 - g^2}, \quad (7.25)$$

$$\varphi = \arctg \frac{-g - \frac{3}{4} \lambda \gamma a^2 \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4g}{3\gamma a^2} \right)^2} \right]}{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4g}{3\gamma a^2} \right)^2} - \lambda \frac{4g}{3\gamma a^2}} \quad (7.26)$$

este reprezentat de două „curbe limită” (curba XKY — pentru $\lambda < 0$, curba $X'K'Y'$ — pentru $\lambda > 0$) care separă domeniul regimurilor de vibrații stabile (situat de partea originii) de cele ale regimurilor instabile.

Curbele limită sînt tangente în punctele K și K' la diagramele polare de parametri $\lambda_K = \pm \sqrt{\frac{32g^3}{9\sqrt{3}\gamma}} - 1$ și linia de pulsație constantă

$\Omega_K = \sqrt{1 + \sqrt{3}g}$. Rezultă că pentru $\lambda > \lambda_K$ și $\Omega > \Omega_K$ curbele limită intersectează cercurile răspunsului în frecvență și curbele de pulsație constantă. Punctele situate pe arcele de curbă delimitate de aceste intersecții definesc regimuri instabile de vibrații.

7.2.2. Fenomene de salt

În figura 7.10 s-au pus în evidență discontinuitățile ce apar în variația amplitudinii și fazei vibrației armonice în timpul unei încercări cu baleiaj de frecvență (la $\lambda = \text{const.}$).

Pe o diagramă $\lambda \neq 0$, dacă pulsația Ω crește progresiv de la zero, atunci punctul P , extremitatea vectorului \vec{a} , parcurge cercul în sens orar, amplitudinea și faza variînd progresiv pînă în punctul C , unde cercul este tangent la curba $\Omega'' = \text{const.}$ În continuare are loc un salt la valorile corespunzătoare punctului D în care curba $\Omega'' = \text{const.}$ intersectează cercul, după care se parcurge arcul DO .

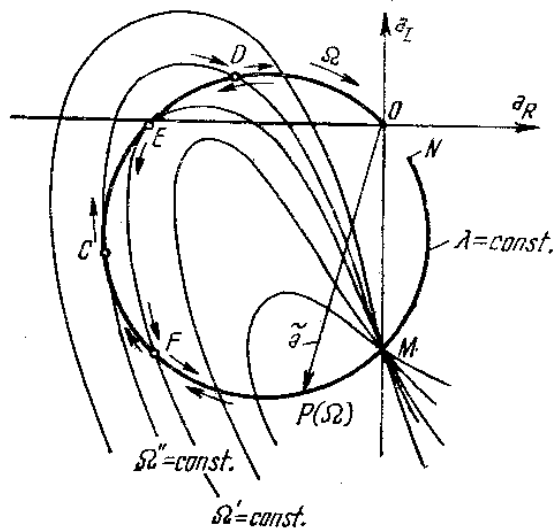


Fig. 7.10

Cînd Ω scade continuu, punctul curent P parcurge cercul de la O la D pînă la E , punctul de tangență cu curba $\Omega' = const.$, de unde „sare” pînă în F , unde curba $\Omega' = const.$ intersectează cercul, după care se îndreaptă prin M spre origine. Deci arcul CE definește regimuri instabile de vibrație, iar arcele FC și ED definesc regimuri condiționat stabile. Punctele de pe arcele NF și DO definesc regimuri stabile de vibrații.

În lucrarea [97] se descriu și fenomenele de salt care apar atunci cînd λ variază continuu iar $\Omega = const.$, deci cînd extremitatea vectorului \tilde{a} parcurge o linie de pulsație constantă.

7.2.3. Identificarea parametrilor dinamici ai sistemului

7.2.3.1. Metoda celor trei cercuri

Dacă pe aceeași diagramă (fig. 7.11) se trasează două cercuri (7.23) de parametri λ_1 , respectiv λ_2 (linie continuă) împreună cu cercul $\lambda = 0$ (linie întreruptă), cele trei cercuri se intersectează în punctul M ($0, -x_r$). Pe cercul $\lambda = 0$ acest punct are pulsația

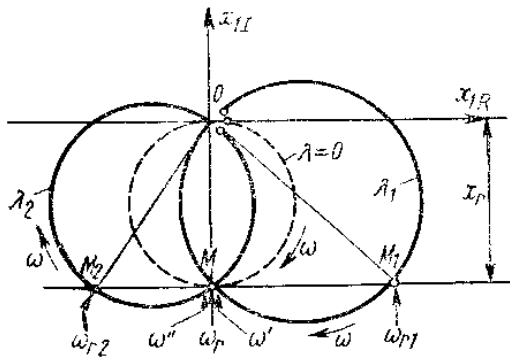


Fig. 7.11

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{g^2}}, \quad (7.27)$$

pe cercul $\lambda = \lambda_1$ are pulsația $\omega' = \omega_n \sqrt{1 + \frac{3\gamma}{4g^2} + \lambda_1 g}$ iar pe cercul $\lambda = \lambda_2$

are pulsația $\omega'' = \omega_n \sqrt{1 + \frac{3\gamma}{4g^2} + \lambda_2 g}$.

Factorul de amortizare g se calculează cu relația

$$g = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\omega'^2 - \omega''^2)}{(1 + \lambda_1^2)\omega_{r2}^2 - (1 + \lambda_2^2)\omega_{r1}^2} \quad (7.28)$$

unde ω_{r1} este pulsația punctului M_1 de pe cercul $\lambda = \lambda_1$ iar ω_{r2} este pulsația punctului M_2 de pe cercul $\lambda = \lambda_2$. Punctele M_1 și M_2 se determină la intersecția cu cercurile a dreptei Δ , perpendiculară pe diametrul OM al cercului $\lambda = 0$.

Din (7.27) se deduce

$$\gamma = \frac{4}{3} g^2 \left(\frac{\omega_r^2}{\omega_n^2} - 1 \right) \quad (7.29)$$

unde

$$\omega_n^2 = \frac{(1 + \lambda_1^2)\omega_{r_2}^2 - (1 + \lambda_2^2)\omega_{r_1}^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}. \quad (7.30)$$

Evaluînd panta caracteristicii elastice în origine

$$k = \frac{1}{g} \frac{\hat{f}}{x_r}, \quad (7.31)$$

unde x_r este amplitudinea deplasării corespunzătoare punctului M pe cercul $\lambda = 0$, se poate calcula apoi coeficientul de neliniaritate

$$\mu = \gamma \frac{k^2}{\hat{f}^2}. \quad (7.32)$$

7.2.3.2. Metoda celor două cercuri

Pe aceeași diagramă (fig. 7.12) se trasează cercul $\lambda = 0$ și un cerc $\lambda > 0$, care se intersectează în origine și în punctul $M [0, -x_r]$. Perpendiculara MM_1 pe diametrul OM al cercului $\lambda = 0$ taie cercul $\lambda > 0$ în punctul M_1 . Factorul de amortizare g se poate calcula cu relația

$$g = \frac{\lambda(\omega'^2 - \omega_r^2)}{(1 + \lambda^2)\omega_r^2 - \omega_{r_1}^2} \quad (7.33)$$

în care ω_r este pulsația punctului M pe cercul $\lambda = 0$, ω' este pulsația punctului M pe cercul $\lambda > 0$, iar ω_{r_1} este pulsația punctului M_1 pe cercul $\lambda > 0$.

Constanta k se calculează cu relația (7.31) iar coeficientul de neliniaritate — cu relațiile (7.32) și (7.29) unde

$$\omega_n^2 = \frac{(1 + \lambda^2)\omega_r^2 - \omega_{r_1}^2}{\lambda^2}. \quad (7.34)$$

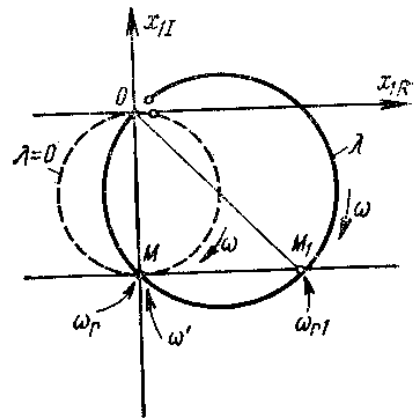


Fig. 7.12

Deși mai simplă decît procedeul anterior, metoda celor două cercuri duce uneori la o localizare mai imprecisă a punctului M pe diagrama $\lambda = 0$, mai ales atunci cînd, pentru evitarea zonelor de instabilitate pe cercul $\lambda \neq 0$, acesta se trasează pentru o valoare λ relativ mică și deci intersecția cu cercul $\lambda = 0$ se face sub un unghi mic.

Un exemplu de aplicare a metodei la determinarea amortizării unui izolator din poliuretan este prezentat în lucrarea [97]. În cazul studiat se arată că dacă nu s-ar fi ținut cont de neliniaritatea materialului, utilizînd în locul relației (7.33) formula (2.113) stabilită pentru sisteme liniare, ar fi rezultat o eroare de 5,5%.

Deoarece existența unei preîncărcări statice a sistemului oscilant impune introducerea unui termen pătratic în ecuația caracteristicii elastice cubice, se studiază elaborarea unei metode de identificare bazate pe analiza oscilatorului cu astfel de caracteristică.

Alte metode de identificare a sistemelor neliniare sînt prezentate de Lorenz [72], Ibáñez [55] și Panik [84].

Bibliografie

- 1 ANGÉLINI, J., DARRAS, B., ONERA TN/1984 RY, 1973.
- 2 ASHER, G. W., Inst. Aero. Sci., Proc. Nat. Spec. Meeting, *Dynamics and Aeroelasticity*, Fort Worth, Texas, 69 (1958).
- 3 ÅSTRÖM, K., EYKHOFF, P., I.F.A.C.-Automatica, **7**, 123 (1971).
- 4 BAHLI, F., Trans. I.R.E. on Circuit Theory, **1**, 21 (1954).
- 5 BASILE, R., Proc. Int. Colloq. Mech., Poitiers, PST 261 (1952).
- 6 BEATRIX, CH., Rech. Aérop., *109*, 57 (1965).
- 7 BEATRIX, CH., ONERA Technical Note 212E (1974).
- 8 BEKEY, G. A., Simulation, **15**, 4, 151 (1970).
- 9 BERMAN, A., FLANNELLY, W. G., A.I.A.A. Journal, **9**, 8, 1481 (1971).
- 10 BERMAN, A., Shock and Vibration Digest, **7**, 1, 10 (1975).
- 11 BERT, C. W., J. Sound Vib., **29**, 2, 129 (1973).
- 12 BISHOP, R.E.D., J. Royal Aero. Soc., **59**, 738 (1955).
- 13 BISHOP, R.E.D., GLADWELL, G.M.L., Phil. Trans. Royal Soc. London, **A255**, 241 (1963).
- 14 BISHOP, R. E. D., GLADWELL, G. M. L., MICHAELSON, S., *The Matrix Analysis of Vibration*, University Press, Cambridge, 1965.
15. BISPLINGHOFF, R. L., ASHLEY, H., HALFMAN, R. L., *Aeroelasticity*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1955.
- 16 BLEAKNEY, W. M., HAMM, J. D., J. Aero. Sci., **9**, 12, 439 (1942).
- 17 BONNEAU, E., Rech. Aérop., *130*, 45 (1969).
- 18 BROADBENT, E. G., HARTLEY, E. V., R.A.E. Tech. Note: Struct. Nr. 233 (1958).
- 19 BUZDUGAN, GH., MIHĂILESCU, E., RADEȘ, M., *Măsurarea vibrațiilor*, Editura Academiei R. S. România, București, 1979.
- 20 BUZDUGAN, GH., FETCU, L., RADEȘ, M., *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Editura Academiei R.S.R., București, 1975.
- 21 CAUGHEY, T.K., J. Appl. Mech., Series E, **27**, 269(1960).
- 22 CAUGHEY, T.K., O'KELLY, M.E.J., J. Appl. Mech., Series E, **32**, 1, 583(1965).
- 23 CHLADNI, E. F. F., *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*, 1787.
- 24 CLERC, D., Rech. Aéron., *85*, 59(1961).
- 25 CLERC, D., Rech. Aéron., *87*, 55(1962).
- 26 COTTIN, N., DELLINGER, E., Z. Flugwiss., *22*, 259(1974).
- 27 CUNNINGHAM, H. J., J. Sound Vib., **14**, 142 (1971).
- 28 DAVIS, J. C., S.A.E., Paper Nr. 720045 (1972).
- 29 DECK, A., O.N.E.R.A. Techn. Paper Nr. 870 (1970).
- 30 DECK, A., Note Technique O.N.E.R.A., Nr. 129 (1968).
- 31 DUDNIKOV, E. E., Avtomatika i telemekhanika, **20**, 5, 576 (1959).
- 32 EYKHOFF, P., *System Identification*, John Wiley & Sons, Inc., London, 1974.
- 33 EWINS, D. J., *Some Whys and Wherefores of Impedance Testing*, London, 1971.
- 34 FEIX, M., Rech. Aérop., *4*, 221 (1970).
- 35 FEIX, M., Rech. Aérop., *1*, 21 (1975).
- 36 FLANNELLY, W. G., BERMAN, A., GIANANTE, N., Report, R-912, Kaman Aero. Corp., Fort Eustis, Virginia, 1971.
- 37 FOSS, K. A., Tech. Report 25-30, M.I.T., 1956.
- 38 FOSTER, R. M., Bell System Tech. Journal, April 1924.
- 39 FÖRSCHING, H., V.D.I.-Zeitschrift, **105**, 1269 (1963).
- 40 FÖRSCHING, H., V.D.I.-Bericht, *88*, 65 (1965).
- 41 FRAZER, R.A., DUNCAN, W.J., COLLAR, A.R., *Elementary Matrices*, Macmillan Comp., New York, 1946.

- 42 GAUKROGER, D. R., SKINGLE, C. W., HERON, K. H., J. Sound Vibr., **29**, 3, 341 (1973).
- 43 GAUKROGER, D. R., HERON, K. H., SKINGLE, C. W., J. Sound Vibr., **35**, 4, 559 (1974).
- 44 GAUZY, H., Rech. Aéron., **59**, 39 (1957).
- 45 GAUZY, H., Rech. Aérosp., **101**, 57 (1964).
- 46 GAUZY, H., in *Manual on Aeroelasticity* (ed. W. P. Jones), Part IV, Ch. 4A, 1960.
- 47 GLADWELL, G. M. L., Aeronautical Jnl., **66**, 124 (1962).
- 48 GOLUB, G. H., REINSCH, C., in *Handbook of Automatic Computation*, Springer Verlag, 1971.
- 49 GRINSTED, B., Proc. Inst. Mech. Engrs. (A), **166**, 3, 309 (1952).
- 50 HART, G. C., COLLINS, J. D., S.A.E. Trans., **81**, 4, 2408 (1972).
- 51 HAWKINS, F. J., Revue Française Mécanique, **13** (1965).
- 52 HERTWIG, A., FRÜH, G., LORENZ, H., Veröff. DEGEBO T. H. Berlin, H. 1, Springer Verlag, Berlin, 1933.
- 53 HEUKELOM, W., Report M 23020, Koninklijke Shell-Lab., Amsterdam, 1957.
- 54 HILLYER, D. F., Paper 7101, S.E.S.A. 1971 Spring Meeting, Salt Lake City (1971).
- 55 IBÁÑEZ, P., *Identification of Dynamic Structural Models from Experimental Data*, UCLA-ENG. 7225 (1972).
- 56 * * * *Identification in Automatic Control Systems*, Proc. First I.F.A.C. Symposium, Praga, 1967.
- 57 * * * *Identification and Process Parameter Estimation*, Proc. Second I.F.A.C. Symposium, Praga, 1970.
- 58 * * * *Identification and System Parameter Estimation*, Proc. Third I.F.A.C. Symposium, The Hague/Delft, 1973.
- 59 ISERMANN, R., *Experimentelle Analyse der Dynamik von Regelsystemen, Identification I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971.
- 60 ISERMANN, R., *Prozessidentifikation und Parameterschätzung*, Springer Verlag, Berlin, 1974.
- 61 KENNEDY, C. C., PANGU, C.D.P., J. Aero. Sci., **14**, 11, 603 (1947).
- 62 KIMBALL, A. L., LOVELL, D. E., Physical Review, Series 2, **30**, 948 (1927).
- 63 KLOSTERMAN, A. I., *On the Experimental Determination and Use of Modal Representations of Dynamic Characteristics*, Ph. D. Thesis, Univ. Cincinnati, 1971.
- 64 KLOSTERMAN, A. L., LEMON, J. R., A.S.M.E. Publ. VIBR—30 (1969).
- 65 KRAWCZYK, R., Z.A.M.M., **49**, 341 (1969).
- 66 LANCASTER, P., *Lambda-Matrices and Vibrating Systems*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- 67 LANG, G. F., Application Note 9, Nicolet Sci. Corp., 1975.
- 68 LAZAN, B. J., *Damping of Materials and Members in Structural Mechanics*, Pergamon Press, New York, 1968.
- 69 LEVY, E. C., I.R.E. Trans. on Automatic Control, AC—4, 37 (1959).
- 70 LEWIS, R. C., WRISLEY, D. L., J. Aero. Sci., **17**, 11, 705 (1950).
- 71 LORENZ, H., Ingenieur-Archiv, **5**, 376 (1934).
- 72 LORENZ, H., *Grundbau Dynamik*, Springer Verlag, Berlin, 1960.
- 73 MAZET, R., AGARD Report 40 T (1956).
- 74 MEAD, D. J., A.R.C. Report 19870 (1958).
- 75 MIHĂILESCU, E., RADEȘ, M., Proc. Symp. „Experimental Techniques in Applied Mechanics”, 1—3 Nov. 1972, Bucharest, p. 21.
- 76 MORSE, I. E., SHAPTON, W. R., WOOD, D. M., AFML-Contract F 33615—67—C—1727 (1969).
- 77 NATKE, H. G., NASA TT—F—12446 (1969).
- 78 NATKE, H. G., Jahrbuch der D.G.L.R., 98 (1971).
- 79 NATKE, H. G., STRUTZ, K.-D., Kolloq. „Dämpfungsverhalten von Werkstoffen und Bauteilen — Viskoelastische Systeme”, T.U. Berlin, 13—14 Okt. 1975, p. 305.
- 80 NATKE, H.G., Lehrgang „Berechnung von Maschinenschwingungen”, VDI-Bildungswerk, BW—3152 (1976).
- 81 NATKE, H. G., S.A.E. Paper 760878 (1976).
- 82 NICOLAI, D., V.D.I.-Zeitschrift, **115**, 3, 195 (1973).
- 83 NISSIM, E., J. Royal Aero. Soc., **71**, 126 (1967).
- 84 PANIK, F., Ein Verfahren zur experimentellen Ermittlung von Ersatzmodellen kontinuierlicher, viskoelastischer, mechanischer Systeme, Dissertation, T.U. Berlin, 1972.
- 85 PENDERED, J. W., BISHOP, R.E.D., J. Mech. Eng. Sci., **5**, 345 (1963).
- 86 PENDERED, J. W., J. Mech. Eng. Sci., **7**, 372 (1965).
- 87 PENESCU, C., IONESCU, G., TERTIȘCO, M., CEANGĂ, E., *Identificarea experimentală a proceselor automatizate*, Editura tehnică, București, 1971.
- 88 PENROSE, R., Proc. Cambridge Phil. Soc., **52**, 17 (1956).
- 89 RADEȘ, M., St. cerc. mec. apl., **32**, 3, 607 (1973).
- 90 RADEȘ, M., St. cerc. mec. apl., **33**, 1, 75 (1974).

- 91 RADEȘ, M., Proc. 44th Euromech Colloq. „Dynamics of Machine Foundations”, Bucharest, 29–31 Oct. 1973, p. 363.
- 92 RADEȘ, M., Proc. Second Int. Symp. RILEM „New Developments in Non-Destructive Testing of Non-Metallic Materials”, Constanța, 4–7 Sept. 1974, p. 133.
- 93 RADEȘ, M., Shock and Vibration Digest, **8**, 2, 73 (1976).
- 94 RADEȘ, M., St. cerc. mec. apl., **35**, 1, 73 (1976).
- 95 RADEȘ, M., St. cerc. mec. apl., **35**, 4, 547 (1976).
- 96 RADEȘ, M., Lucrările a 2-a Conf. Naț. Mașini Unelte, București, 27–28 Dec. 1976, p. 23.
- 97 RADEȘ, M., Rev. Roum. Sci. Tech.-Méc. Appl., **22**, 4, 593 (1977).
- 98 RANEY, J. P., HOWLETT, J.T., NASA TN D-5069 (1969).
- 99 RATJEN, H., MOHLENKAMP, J., Diplomarbeit T.U. Hannover, 1971.
- 100 RAYLEIGH, Lord, *The Theory of Sound*, Dover, New York, 1950.
- 101 RICHARDSON, M., POTTER, R., I.S.A.-A.S.I. Reprint 74250, 239 (1974).
- 102 RODDEN, W. P., WHITTIER, J. S., J. Acoust. Soc. Amer., **34**, 469 (1962).
- 103 ROST, J., Rech. Aéron., **28**, 49 (1952).
- 104 RUZICKA, J. E., DERBY, T.F., *Influence of Damping in Vibration Isolation, Shock and Vibration Monograph* – 7, 1971.
- 105 SAGE, A. P., MELSA, J. L., *System Identification*, Academic Press, New York, 1971.
- 106 SALTER, J. P., *Steady-State Vibration*, Mason, London, 1969.
- 107 SANATHANAN, C. K., KOERNER, J., I.E.E.E. Trans. on Automatic Control, AC-8, 56 (1963).
- 108 VON SANDEN, H., *Ingenieur-Archiv*, **1**, 645 (1930).
- 109 SCANLAN, R. H., ROSENBAUM, R., *Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter*, Macmillan, New York, 1951.
- 110 SIMOYU, M. P., *Automation and Remonte Control*, **10**, 6, 514 (1957).
- 111 SNOWDON, J. C., J. Acoust. Soc. Amer., **35**, 6, 821 (1963).
- 112 STAFFIN, H. K., STAFFIN R., *Instruments and Control Systems*, **38**, 137 (1965).
- 113 STAHL, C.V., FORLIFER, W. R., Proc. of AIA-AFOSR Flight Flutter Testing Symp., May 1958.
- 114 STREJC, V., *Messen, Steuern, Regeln*, **3**, 7 (1960).
- 115 * * * *System Identification of Vibrating Structures* (editors W. D. Pilkey, R. Cohen), A.S.M.E., New York, 1972.
- 116 THOREN, A. R., A.I.A.A. Paper 72-346 (1972).
- 117 TRAILL-NASH, R. W., J. Aero. Sci., **25**, 775 (1958).
- 118 TRAILL-NASH, R. W., A.R.L. Report SM280 (1961).
- 119 TRAILL-NASH, R. W., LONG, G., BAILEY, C. M., J. Mech. Engr. Sci., **9**, 3, 402 (1967).
- 120 de VEUBEKE, B. M. F., *Bulletin de la Classe des Sciences, Acad. R. de Belgique, 5e Serie*, **34**, 626 (1948).
- 121 de VEUBEKE, B. M. F., AGARD Report 39 (1956).
- 122 de VEUBEKE, B. M. F., in *Manual on Aeroelasticity* (ed. W. P. Jones), Part I, Ch. 3, 1960.
- 123 VLACH, J., *Computerized Approximation and Synthesis of Linear Networks*, John Wiley & Sons, New York, 1969.
- 124 de VRIES, G., Z.M.B. Forschungsbericht 1882 (1942).
- 125 de VRIES, G., Rech. Aéron., **18**, 11 (1950).
- 126 de VRIES, G., Rech. Aéron., **30**, 47 (1952).
- 127 de VRIES, G., Rech. Aéron., **44**, 55 (1955).
- 128 de VRIES, G., Rech. Aéron., **74**, 41 (1960).
- 129 de VRIES, G., Rech. Aéron., **90**, 59 (1962).
- 130 de VRIES, G., Rech. Aéron., **92**, 49 (1963).
- 131 de VRIES, G., Rech. Aéron., **95**, 49 (1963).
- 132 de VRIES, G., Rech. Aérosp., **102**, 43 (1964).
- 133 de VRIES, G., BEATRIX, CH., in *Progress in Aeronautical Sciences*, **9**, Pergamon Press, 1968.
- 134 WAGNER, K. W., *Lehre von den Schwingungen und Wellen*, Dietrich Verlag, Wiesbaden, 1957.
- 135 WHITE, R. G., I.S.V.R. Technical Report Nr. 12, Southampton, 1969.
- 136 WOLFE, M.O.W., KIRKBY, W. T., in *Manual on Aeroelasticity* (ed. W. P. Jones), Part IV, Ch. 10, 1960.
- 137 WOODCOCK, D. L., *Aeronautical Quarterly*, **14**, 1, 45 (1963).
- 138 YOUNG, J. P., ON, F. J., S.A.E. Paper 690615 (1969).
- 139 WITTMAYER, H., *Zeitschrift für Flugwissenschaften*, **19**, 6, 229 (1971).
- 140 WITTMAYER, H., *Zeitschrift für Flugwissenschaften*, **24**, 3, 139 (1976).
- 141 ZIMMERMANN, H., *Aeroelastik-Kolloquium der T. U. Berlin*, Juli, 1971.

Identification of vibrating systems

(Summary)

The identification of vibrating structures and machines through the use of experimental data is a prevalent task for those interested in obtaining a rational and reliable design of mechanical systems.

Typically, this reducing of a dynamical process to mathematical equations has been extensively used in such fields as aerospace and automotive structures, rail transportation systems, machine tools, machine foundations, buildings, etc.

The early studies were limited to the determination of natural frequencies and mode shapes, as well as to the measurement of damping and dynamic stiffness properties. The development of the analog and digital computers and the new digital real-time measuring equipment have contributed to the implementation of new computer oriented system identification techniques.

Perhaps one of the most powerful application is the optimization of the design of a structure in respect to its dynamic behaviour by altering the mass and stiffness properties of the corresponding analytical model. This avoids making physical modifications on a prototype, which would be an inefficient, time-consuming process, made simply on a trial and error basis.

The purpose of this book is twofold. First, to present a critical survey of the classical works on parameter estimation of mechanical structures and to provide the research workers, design and production engineers with useful identification schemes, assisting them to formulate logically based mathematical models of the actual physical systems. Second, methods recently developed by the author are described, which were successfully applied to the determination of the dynamic properties of materials and structures.

The basic concepts are defined in the introductory chapter. Chapter two is concerned with the parameter estimation of single-degree-of-freedom systems. Separate treatment is given to the systems with hysteretic and viscous damping in order to avoid misuse of the approximate formulae to heavily damped systems. The most frequently used data-reduction techniques are discussed, particularly the graphical analysis of the frequency-response curves. Both grounded and ungrounded systems are considered, excited by harmonic forces of constant amplitude or due to rotating unbalance. Identification methods using excitation with forces in quadrature are described in detail.

Chapter three contains some elements from the theory of vibration of lumped-parameter multi-degree-of-freedom systems having proportional or nonproportional damping. The harmonic response of such discrete systems is expressed in terms of the real (classical or forced) or complex modes of vibration.

In chapter four comments are made on the derivation of the necessary experimental data and on the structure of the analytical models used in system identification. Difficulties raised by ill conditioned matrices and truncated models are presented.

The following chapters are concerned with identification methods using single-point (chapter 5) and multi-point (chapter 6) excitation. Both direct and iterative parameter optimization methods are discussed.

Chapter seven provides an introduction to the parameter estimation of single-degree-of-freedom non-linear systems, with linear hysteretic damping and cubic stiffness.

Aspects connected to the instrumentation used and the practical implementation of the presented methods are treated in reference [19].

Contents

Foreword	5
List of Symbols	11
1. The Dynamic Characteristics of Mechanical Systems and Their Identification . . .	13
1.1. Nature and effects of vibrations	13
1.2. Parts of a dynamic study	14
1.3. Analysis of the dynamic response of a mechanical system	16
1.4. Identification of mechanical systems	17
2. Parameter Identification of One-Degree-of-Freedom Linear Systems	20
2.1. Damping models	20
2.2. Excitation with harmonic forces applied to the mass	26
2.3. Excitation using harmonic forces in quadrature	60
2.4. Excitation with rotating unbalance forces	67
2.5. Harmonic excitation of ungrounded systems	71
2.6. Identification methods without frequency sweep	82
3. Elements of the Theory of Vibration of Linear Lumped Parameter Systems	94
3.1. Vibration of conservative systems	94
3.2. Vibration of damped systems	98
3.2.1. Hypotheses on damping	98
3.2.2. Real „classical” modes of vibration	99
3.2.3. Real forced modes of vibration	104
3.2.4. Complex modes of vibration	111
4. Principles of the Dynamic Identification of Mechanical Systems	120
4.1. Scheme of the dynamic identification processes	120
4.2. Experimental determination of the dynamic characteristics of real systems	122
4.3. Structure of the analytical models	132
5. Identification of Linear Systems Using Single Point Harmonic Excitation	144
5.1. Principle of identification methods using single point harmonic excitation	144
5.2. Identification of undamped systems	145

5.3. Identification of systems with proportional damping	151
5.4. Identification of systems with nonproportional damping	177
5.5. Identification of heavily damped systems	191
6. Identification of Linear Systems Using Multi-Point Harmonic Excitation	199
6.1. Principle of simultaneous multi-point excitation methods	199
6.2. Phase resonance method	203
6.2.1. Appropriation of excitation forces	204
6.2.2. Determination of modal parameters	210
6.3. Multi-point successive excitation methods	222
7. Parameter Identification of One-Degree-of-Freedom Nonlinear Systems	229
7.1. Harmonic excitation methods	229
7.2. Harmonic excitation methods using forces in quadrature	236
Bibliography	242

Redactor: LIA CREȚOIU
Tehnoredactor: TUDOR IONEL
Coperta de: OLARU ION

Bun de tipar 21 XII 1978. Tiraj 2.720
Format 16/70 × 100. Coli de tipar 15,50.
C. Z. pentru biblioteci mari 534.1:62.
C. Z. pentru biblioteci mici 53:62.



C. 1852 – I. P. Informația,
str. Brezoianu nr. 23–25,
București